

Grau en Matemàtiques

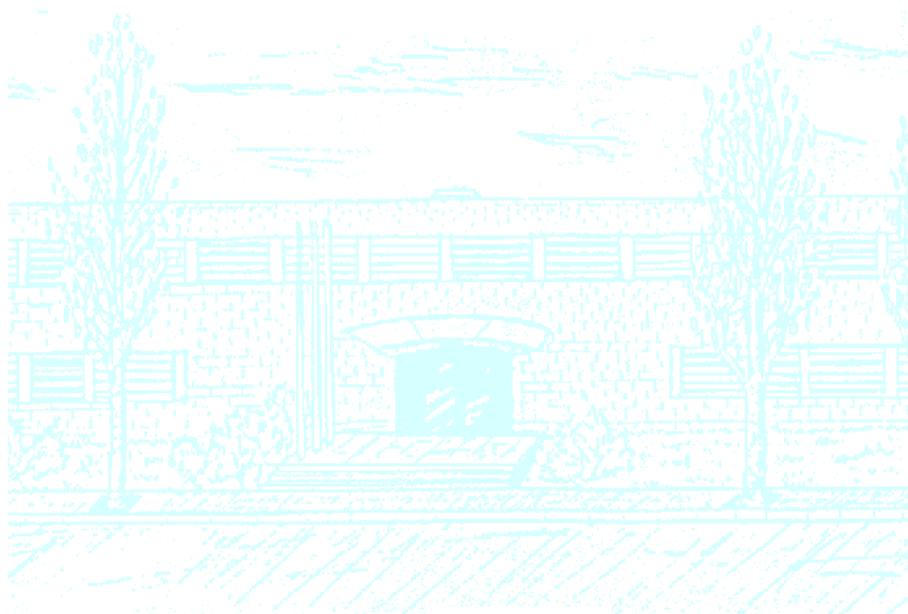
Títol: La constant de Feigenbaum

Autor: Miguel Pereira Hernández

Director: Inmaculada Concepción Balmó Barraca,
Pau Martín de la Torre

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2017-2018



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau de Matemàtiques
Treball de fi de grau

La constant de Feigenbaum

Miguel Pereira Hernández

Supervisat per Inmaculada Baldomá Barraca i Pau Martín de la Torre

Juny, 2018

Gràcies a Steven Strogatz i Robert L. Devaney, per fer unes introduccions comprensibles que em van resultar molt aclaridores al principi d'aquest treball.

També vull agrair als meus pares, Ana i Jesús, al meu germà Pablo, i a la resta de la meva família, per la seva paciència aquests anys d'universitat.

Vull agrair el suport i els ànims a l'Alba, que no ha deixat d'estar al meu costat

Als meus amics Miguel i Gerard, per les xerrades i les innumerables hores de companyia a la biblioteca.

Per últim, agrair a l'Inma i el Pau, els meus tutors, que m'han guiat per fer aquest treball i en tot moment m'han donat l'ajuda necessària.

Abstract

Aquest treball comença amb una petita introducció a la teoria de bifurcacions amb un exemple d'aplicació unimodal. Després, es presenten els resultats teòrics que permeten entendre com es produeix la cascada de doblament de període, i es mostra com l'estructura fractal de les diferents branques del diagrama de bifurcació està relacionada amb els arguments de la teoria de la renormalització. A continuació, es presenten les tècniques de renormalització que va utilitzar Feigenbaum per deduir la universalitat de la constant δ . També s'inclouen i s'expliquen dues proposicions que confirmen que la teoria de renormalització és correcta.

Un punt crucial en la teoria de la renormalització és demostrar l'existència d'un punt fix d'un cert operador funcional. La prova d'aquest resultat, deguda a Orscar Lanford III, és presentada amb tot detall en aquest treball. A més, s'inclouen els detalls de l'aplicació del teorema de Schauder.

A continuació, es presenta un algorisme per calcular la constant de δ . Aquest algorisme ha estat implementat en diversos llenguatges de programació, i s'inclouen els resultats obtinguts en cadascun d'ells, així com un anàlisi del temps computacional de l'algorisme. Juntament amb això, s'expliquen les dificultats que han aparegut amb cada llenguatge.

Al final del treball s'inclou un annex amb dues demostracions completes de teoremes anunciats en apartats anteriors: el teorema de les bifurcacions de doblament de període i el teorema de Schauder. En aquest annex també s'inclouen els codis utilitzats pel càlcul de la constant.

Paraules clau

constant de Feigenbaum, renormalització, bifurcacions, punt fix, doblament de període, universalitat, caos

1. Introducció

Aquest treball pretén il·lustrar un dels primers exemples on s'han aplicat amb èxit el que després s'han anomenat tècniques de renormalització.

Més concretament, la renormalització s'ha fet servir per establir la universalitat de les cascades de doblament de període en aplicacions unimodals (vegeu la definició d'aplicació unimodal a definició 1.0.1). En aquest cas, aquesta teoria ha permès desenvolupar mètodes numèrics que permeten calcular algunes constants universals involucrades (en concret, la constant de Feigenbaum δ).

Si bé la major part del material contingut en aquesta memòria està extret de diversos articles i llibres (completant algunes demostracions), també s'ha implementat en diferents llenguatges de programació (C++, Matlab, PARI/GP) un algorisme per calcular la constant δ , de manera que s'ha pogut obtenir la constant amb 19 xifres decimals correctes (podeu trobar-ho a la secció 5).

Les tècniques de renormalització es mostren amb l'exemple concret de l'aplicació logística

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n),$$

que és un cèlebre exemple de sistema dinàmic discret, unidimensional i parametritzat, on μ és el paràmetre. Coneguda inicialment per ser un model de creixement de població, va cobrar importància molts anys més tard, quan es va veure que canvis molt petits en el seu paràmetre o en la condició inicial donaven com a resultat comportaments molt diferents i complexos tot i ser un polinomi de grau 2. L'estudi d'aquest comportament va donar lloc al que avui coneixem com a teoria del caos.

La dependència quantitativa i qualitativa del comportament dels iterats respecte del paràmetre va ser la característica que va cridar l'atenció del físic Mitchell Feigenbaum. Concretament va detectar que a cert valor del paràmetre tenim un cicle estable i, augmentant el paràmetre, el cicle és reemplaçat per cicles successius amb un procés conegut com doblament de període. Aquest doblament de període continua fins a un període infinit, i llavors s'assoleix el que Feigenbaum creia que era un comportament impredecible. Estudiar aquest comportament i poder trobar algunes propietats estadístiques que fossin aplicables a altres camps, com l'estudi de la turbulència d'un fluid, on apareix el doblament de període per a números de Reynolds alts, el va portar en 1975 a estudiar l'aplicació logística.

Aquest estudi va clarificar el mecanisme del doblament de període i va portar a un altre tipus d'equació per determinar els valors de μ pels quals apareixia el doblament de període. En aquell temps Feigenbaum mai havia utilitzat un superordinador (de fet la seva capacitat calculística residia en una calculadora programable). El mètode consistia en trobar el valor del paràmetre iterant amb el mètode de Newton, on cada pas requeria 2^n iteracions de l'aplicació logística. Així, quan n creixia, era més difícil trobar la solució. Llavors arribà el descobriment: els valors μ pels quals es produeix un doblament de període convergien geomètricament, és a dir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta$$

Això permetia estimar millor la següent μ inicial per començar amb el mètode de Newton. Aquesta observació no era coneguda degut a que la resta d'experiments es feien amb ordinadors més potents, i per tant les solucions es trobaven automàticament sense necessitat de donar una condició inicial tan ajustada.

Que hi havia convergència geomètrica ja va ser una sorpresa, però a més aquest comportament va resultar d'interès perquè apareixia en altres mapes del mateix tipus. Feigenbaum ho explica així en un article de 1980:

Accordingly, I spent a part of a day trying to fit the convergence rate value, 4.669, to the mathematical constants I knew. The task was fruitless, save for the fact that it made the number memorable. At this point I was reminded by Paul Stein that period doubling isn't a unique property of the quadratic map, but also occurs, for example, in

$$x_{n+1} = \mu \sin(\pi x_n).$$

However, my generating function theory rested heavily on the fact that the nonlinearity was simply quadratic and not transcendental. Accordingly, my interest in the problem waned.

Perhaps a month later I decided to determine the μ 's in the transcendental case numerically. This problem was even slower to compute than the quadratic one. Again, it became apparent that the μ 's converged geometrically, and altogether amazingly, the convergence rate was the same 4.669 that I remembered by virtue of my efforts to fit it.

Les aplicacions unimodals a les que hem fet referència són:

Definició 1.0.1. Sigui $f : I \rightarrow I$, $I = [a, b]$. L'aplicació és unimodal si

- $f(a) = f(b) = 0$.
- f té un únic punt crític c , amb $a < c < b$.

L'aplicació logística i l'aplicació sinus de la que parla Feigenbaum tenen el mateix comportament qualitatiu per valors positius del paràmetre μ perquè són unimodals i perquè les dues tenen un màxim quadràtic, és a dir, $f''(c) < 0$, on c és el punt crític.

La constant δ de Feigenbaum canvia segons si l'aplicació unimodal té un màxim o un mínim quadràtic.

El fet que la convergència aparegui en diferents mapes unimodals paramètrics fa que en aquest sentit, la constant δ sigui universal. En aquest cas, com treballem amb funcions unimodals amb un màxim quadràtic, $\delta \approx 4.699$. La universalitat d'aquesta constant ve donada per la relació amb una funció universal g que s'obté mitjançant el procés de la renormalització, que s'explica en aquest treball. Aquest procés utilitza un reescalament, que ve donat per una altra constant universal $\alpha = -2.5...$, que es defineix com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha$$

on d_n són unes distàncies amb signe determinades entre uns certs punts (figura 11).

En aquest treball treballem amb els sistemes dinàmics discrets, que són aplicacions

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

que presenten característiques equivalents als sistemes dinàmics continus $\dot{x} = f(x)$. Per exemple, en ambdós sistemes, l'estudi dels punts fixos resulta primordial. En el cas dels sistemes dinàmics continus, els punts fixos són els \bar{x} tals que $f(\bar{x}) = 0$. En canvi, en el cas discret, un punt fix \bar{x} compleix $\bar{x} = f(\bar{x})$.

En el cas dels sistemes dinàmics discrets s'anomena òrbita d'un punt x_0 , al conjunt $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0) = f(f(x_0)), \dots\}$. Les òrbites de les aplicacions unidimensionals a l'interval són molt fàcils de veure gràficament, perquè traçant la recta $y = x$, l'òrbita del punt x_0 és pot trobar traçant primer una línia vertical fins que aquesta interseca la funció f , que seria el punt $f(x_0)$, llavors es traça una línia horitzontal fins que s'interseca

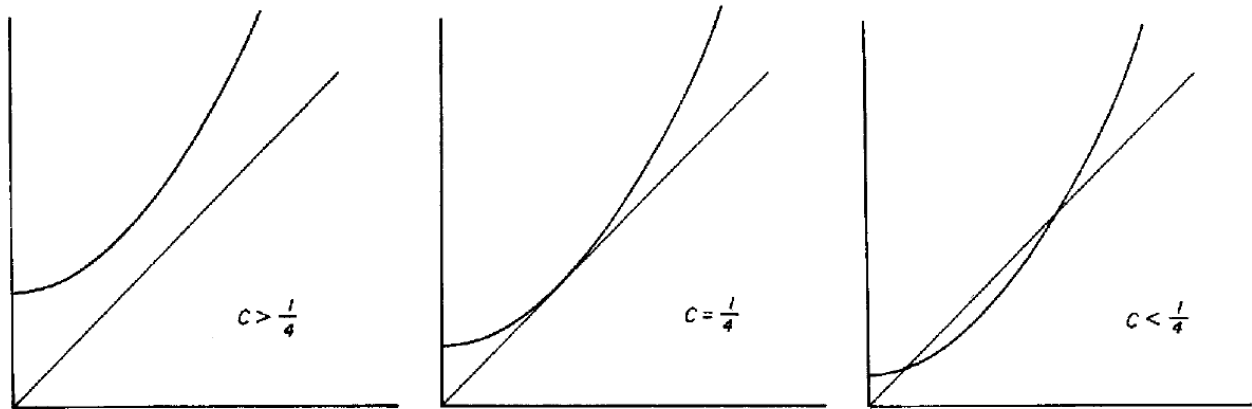


Figura 1: El gràfic de $Q_c(x) = x^2 + c$ per $c > 1/4$, $c = 1/4$, i $c < 1/4$. Imatge de [5].

la recta $y = x$ i es torna a traçar una línia vertical fins que aquesta interseca amb la funció f (vegeu la figura 3). Un punt és fix si la seva òrbita té un únic element. Amb el procediment gràfic, un punt fix és una intersecció entre la recta $y = x$ i la gràfica de la funció f . Noteu que a la figura 3, a la gràfica esquerra, l'òrbita de x_0 tendeix cap a un punt fix.

Els sistemes dinàmics discrets poden tenir paràmetres que fan que l'estructura qualitativa de l'aplicació canviï quan el valor del paràmetre varia. En particular els punts fixos poden aparèixer o desaparèixer segons els valors del paràmetre. Aquests canvis qualitius s'anomenen bifurcacions. Per il·lustrar aquest concepte considerem la família quadràtica de funcions

$$Q_c(x) = x^2 + c,$$

on c és un paràmetre i el sistema dinàmic discret associat a ella

$$x_{n+1} = Q_c(x_n).$$

La gràfica de Q_c té tres posicions respecte de la diagonal, depenent si $c > \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ o $c < \frac{1}{4}$. Vegeu la figura 1. Noteu que Q_c no té punts fixos quan $c > \frac{1}{4}$. Quan $c = \frac{1}{4}$, Q_c té un únic punt fix a $x = \frac{1}{2}$. I quan $c < \frac{1}{4}$ té dos punts fixos $0 < q < p$. Un anàlisi trivial de les seqüències $x_{n+1} = Q_c(x_n)$ ens permet afirmar que quan $0 < x_0 < p$, $x_n \rightarrow q$ quan $n \rightarrow \infty$. Així que q és el que anomenem un punt atractiu (perquè atrau els punts propers). Per contra, si $x_0 > p$, la successió $x_n \rightarrow \infty$ quan $n \rightarrow \infty$, p és un punt fix repulsor (perquè repel·leix els punts del seu voltant). Llavors, l'espai de fases de Q_c canvia quan c passa pel valor $\frac{1}{4}$. Aquest canvi és un exemple de bifurcació. Vegeu l'espai de fases a la figura 2. Aquesta bifurcació s'anomena saddle-node o bifurcació tangent.

La bifurcació de doblament de període, que es la que estudiarem en aquest treball, consisteix en que quan es mou el paràmetre es pot passar de tenir un punt fix a tenir una òrbita de dos elements, és a dir, tenir dos punts p, q tals que

$$f(p) = q,$$

$$f(q) = p.$$

és a dir, hi ha un punt p tal que

$$f^2(p) = p.$$

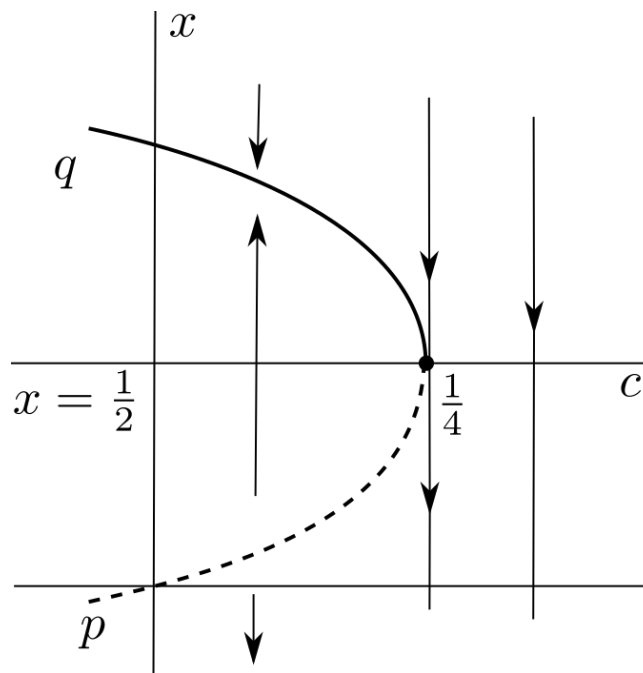


Figura 2: Espai de fases de $Q_c(x) = x^2 + c$. Q_c no té punts fixos quan $c > \frac{1}{4}$, quan $c = \frac{1}{4}$ hi ha un únic punt fix, i quan $c < \frac{1}{4}$ hi ha dos punts fixos p, q . p és repulsor i q és atractor.

Aquest cas correspon al que s'anomena com una òrbita periòdica de període 2, i els seus punts són punts periòdics de període 2. Un cop es té una òrbita d'aquest tipus, el que es pot fer es considerar una nova aplicació que sigui $h(x) = f^2(x)$. Llavors, qualsevol òrbita de període 2 de f passa a ser un punt fix de h , perquè es té

$$h(p) = f^2(p) = p.$$

Per tant, ens podem tornar a reduir a l'estudi de punts fixos. Un cop arribats a aquest punt, si es torna a produir una bifurcació, es considerar $h^2 = f^4$ per tornar a considerar els punts fixos. Aquest és un dels procediments que s'utilitza en aquest treball, perquè resulta molt més fàcil treballar amb punts fixos d'una aplicació f^{2^n} que amb un cicle de 2^n punts. Aquest comportament s'aprecia a l'aplicació logística per valors de μ propers a 3. En efecte, es pot comprovar mitjançant càlculs simples que per valors $\mu < 3$ tenim un únic punt fix atractor i que per valors $3\mu < 1 + \sqrt{6}$, el punt fix es torna repulsor i apareix una òrbita periòdica de període 2 que és atractora. (vegeu figura 3).

Una de les eines gràfiques que també s'utilitza són els diagrames de bifurcació, per veure gràficament com canvien els punts fixos atractors i els cicles atractors amb els paràmetres. Aquests diagrames es poden obtenir numèricament de manera senzilla en el cas de punts fixos i cicles atractors globals. És d'aquesta manera tan senzilla com s'ha dibuixat el conegut diagrama de desdoblament de període de l'aplicació logística mostrat a la figura 4. En efecte, en aquest cas, només cal iterar un punt qualsevol i la seva òrbita tendirà cap al conjunt atractor.

Com ja hem comentat, en les aplicacions unimodals el procés del doblament de període es va repetint fins a l'infinit, per tant per qualsevol n hi haurà un cicle de 2^n elements per algun valor adequat del paràmetre. En el cas de l'aplicació logística, encara tenim més. En efecte, per $\mu \approx 3.83$ es té un cicle

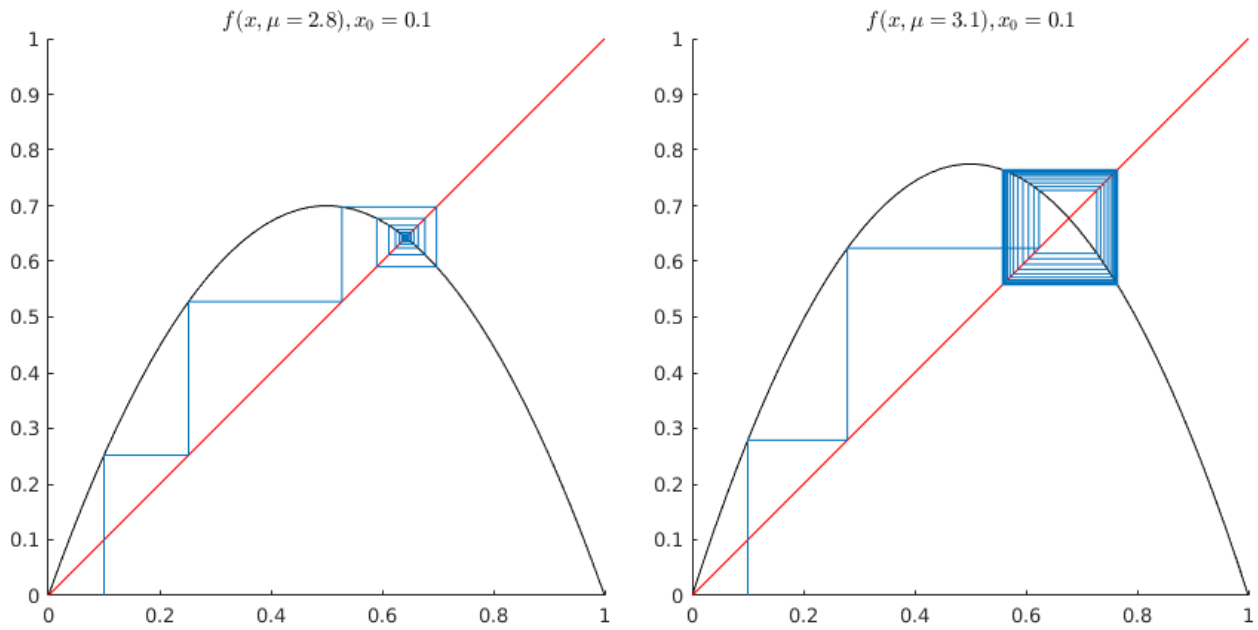


Figura 3: En el cas de l'esquerra hi ha un punt fix atractor. En el cas de la dreta, hi ha un cycle de període 2. A $\mu = 3$ s'ha produït una bifurcació

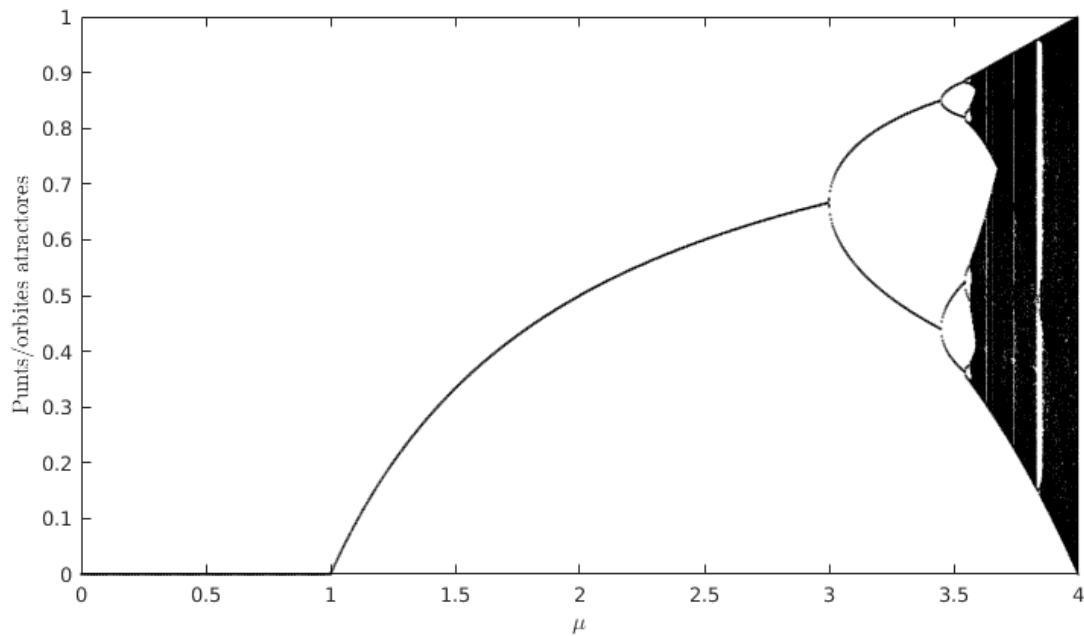


Figura 4: Diagrama de bifurcació de l'aplicació logística. Observeu que per $\mu = 3$ l'únic punt atractor desapareix i apareix un cycle atractor de dos elements. Després, aquest cycle de dos elements passa a ser un cycle de 4 elements. Aquest procés es va repetint formant aquest diagrama fractal.

d'ordre 3, i.e. $f^3(p) = p$ per algun p (veieu la figura 4). Llavors, el teorema de Sharkovsky garanteix que per tot n existeix un cycle de 2^n elements per aquest valor exacte del paràmetre. El que passa és que l'únic cycle atractor és el de període 3.

Teorema 1.0.2. Teorema de Sharkovsky

Consideris l'ordre dels naturals

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 5 \cdot 2^3 \triangleleft 3 \cdot 2^3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 5 \cdot 2^2 \triangleleft 3 \cdot 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3$$

Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un mapa continu. Si f té un cycle de període j , llavors per tot i amb $i \triangleleft j$ segons l'ordre anterior, f té un cycle d'ordre i .

Aquest teorema té conseqüències molt importants:

- Si f té algun punt periòdic, i el seu període no és una potència de 2, llavors, necessàriament, f té un nombre infinit de punts periòdics. I al contrari, si f només té un nombre finit de punts periòdics, llavors tots ells tenen cycles que són necessàriament potència de 2.
- El període 3 és el període més gran a l'ordre de Sharkovsky i per tant implica que existeixen tots els altres períodes.
- El resultat és òptim, en el sentit que es poden construir mapes que tenen punts de període p i no períodes "més grans" conforme l'ordre de Sharkovsky.

El teorema de Sharkovsky ens assegura que els valors de μ pels quals hi ha un doblament de període tenen un límit, i que és menor a $\mu \approx 3.83$, però no ens permet dir quan apareixen les bifurcacions, que és el que s'utilitza en aquest treball. Això ve donat pel següent teorema:

Teorema 1.0.3. *Sigui $f_\lambda : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f_\lambda(x)$ una família uniparamètrica de funcions. Supposeu que f_λ satisfà que existeix λ_0 tal que:*

1. $f_\lambda(0) = 0$ per a tot λ pertanyent a un entorn de λ_0 .
2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$.
3. $\left. \frac{\partial(f_\lambda^2)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$.

Llavors, existeix un entorn B del 0 i una funció $p : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f_{p(x)}(x) \neq x$$

i

$$f_{p(x)}^2(x) = x.$$

La demostració d'aquest teorema es troba a l'apèndix 7.5. Per tant, pel teorema anterior, quan s'arriba a algun valor del paràmetre pel qual la recta tangent a la funció en el punt fix té pendent -1 , es produeix una bifurcació. Aquest és el mecanisme que es repeteix successivament fins a l'infinit en l'aplicació logística (i en moltes altres) i que provoca successius doblaments de període.

Tot i no ser l'objectiu d'aquest treball, acabem aquesta introducció parlant breument de la teoria del caos, ja que l'aplicació logística és, possiblement, l'exemple més senzill on podem trobar un comportament caòtic per valors del paràmetre $\mu > 4$. De fet, mirant l'estructura fractal de les cascades de doblament de període a la figura 4, sembla totalment natural pensar en dinàmica caòtica. Tal com diu Devaney: "The period-doubling route to chaos", a la secció 1.17 de [5].

Hi ha hagut molta discussió sobre què vol dir que un sistema tingui dinàmica caòtica. Anem doncs a introduir els ingredients del caos.

Definició 1.0.4. $f : I \rightarrow I$ és topològicament transitiva si per cada parell de conjunts $U, V \subset I$ existeix $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuïtivament, un mapa topològicament transitiu té punts que eventualment es mouen sota iteració d'un veïnat arbitràriament petit a qualsevol altre. En conseqüència, el sistema dinàmic no es pot descompondre en dos conjunts disjunts que són invariants sota el mapa. Observis que si un mapa té una òrbita densa, és a dir, cada punt està arbitràriament a prop d'una òrbita periòdica, és topològicament transitiu.

Definició 1.0.5. $f : I \rightarrow I$ té dependència sensible de les condicions inicials si existeix $\delta > 0$ tal que, per a qualsevol $x \in I$ i qualsevol veïnat N de x , existeix $y \in N$ i $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Intuïtivament, un mapa té una dependència sensible de les condicions inicials si hi ha punts arbitràriament propers a x que se separen de x després d'unes quantes iteracions de f en almenys δ . Si una aplicació té dependència sensible de les condicions inicials, llavors, a la pràctica, la dinàmica de l'aplicació resulta impossible de determinar numèricament. Els petits errors de computació que s'introdueixen mitjançant un arrodoniment poden veure's magnificats després de la iteració. Els resultats del càlcul numèric d'una òrbita, per molt que sigui exacte, no s'assemblen en res a l'òrbita real.

Amb això es pot definir el caos com

Definició 1.0.6. Sigui V un conjunt, $f : V \rightarrow V$ és caòtica en V si

1. f té una dependència sensible de condicions inicials.
2. f és topològicament transitiva.
3. els punts periòdics són densos en V .

Per resumir, una aplicació caòtica té tres ingredients: impredictibilitat, no és descomposable i té un element de regularitat. Un sistema caòtic és impredictible a causa de la dependència sensible de les condicions inicials. No es pot descompondre en dos subsistemes (dos subconjunts invariants oberts) que no interactuen sota l'acció de f a causa de la transitivitat topològica. I, enmig d'aquest comportament aleatori, tenim un element de regularitat, és a dir, els punts periòdics que són densos.

Segons aquesta definició, l'aplicació logística és caòtica per valors de $\mu > 4$. És curiós comentar aquí que la demostració és relativament fàcil per $\mu > 2 + \sqrt{5}$, però requereix més complexitat per $\mu > 4$.

1.1 Estructura del treball

Un cop presentat l'entorn en el que desenvolupa aquest treball, els objectius i resum del que s'ha realitzat és:

- A la primera part de treball 2, s'ha fet un petit recopilatori de conceptes previs necessaris per tenir una base suficient per l'explicació de la renormalització a l'apartat següent. Alguns conceptes, com la derivada de Schwarz, són característiques tècniques que es presenten perquè estan implícitament relacionades amb la família de funcions utilitzades al treball. Per aquesta secció s'ha utilitzat, majorment, un llibre de R.L. Devaney [5].
- A l'apartat 3, s'introdueix el concepte de renormalització, es mostra quins són els valors dels paràmetres que s'utilitzen per obtenir la constant de Feigenbaum δ , i es presenta la construcció de la funció universal g mitjançant la renormalització de funcions per obtenir l'equació de Feigenbaum-Cvitanović. Amb aquest procés es mostra que g és la funció universal que dona com a resultat la universalitat de la constant δ i α . Per aquesta secció s'han utilitzat, majorment, els articles de M. Feigenbaum [6] [7] [8], unes classes gravades de la Cornell University impartides pel professor S.H. Strogatz [17] [18], a més del seu llibre [19], i un llibre de A.M Sharkovsky [16].
- A l'apartat 4, teoria del punt fix, es demostra, amb la prova d'Oscar Erasmus Lanford III, que l'equació de Feigenbaum-Cvitanović té solució. Per seguir aquesta prova, s'han repassat els càlculs realitzats i s'han completat alguns detalls que no apareixen a l'article. Com a curiositat, a la demostració hi havia un petit error de signe (tot i així, els càlculs es van comprovar i només va resultar ser un error de transcripció). També s'ha afegit el teorema del punt fix de Schauder i s'han comprovat totes les hipòtesis utilitzant el teorema d'Arzelà-Ascoli i la fórmula de la integral de Cauchy. Per aquesta secció s'ha utilitzat principalment l'article de O.E. Lanford III [12].
- A la secció 5 s'explica un algorisme pel càlcul de la constant δ de Feigenbaum mitjançant el mètode de Newton i s'expliquen les dificultats que presenta cada implementació que es va fer d'aquest algorisme en els diferents llenguatges de programació emprats. Juntament amb això, és presenten els resultats de cada implementació, que van millorant cada cop fins a obtenir un resultat millor que el que presenta Feigenbaum en el seu primer article, augmentant el nombre de xifres decimals correctes fins a 15 en un minut de càlcul en un temps menor del que s'explica als articles. Per aquesta secció s'ha utilitzat el primer article de M. Feigenbaum [6] i l'article de K. Briggs [3].

2. Conceptes previs

Presentem en aquesta secció preliminar algunes definicions bàsiques sobre sistemes dinàmics (secció 2.1) així com conceptes relatius a les aplicacions unimodals (secció 2.2).

2.1 Definicions

Sigui $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció dependent d'un paràmetre. Es defineix el sistema dinàmic discret

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n).$$

Donat aquest sistema dinàmic definim:

Definició 2.1.1. L'òrbita de x és el conjunt de punts $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$.

Definició 2.1.2. Es diu que \bar{x} és un punt fix de f_μ si $\bar{x} = f_\mu(\bar{x})$. Noteu un punt fix és aquell que la seva òrbita té només un punt.

Definició 2.1.3. El punt x és un punt periòdic si existeix n tal que $f^n(x) = x$ (i.e. la seva òrbita té n punts). El nombre natural n més petit pel qual $f^n(x) = x$ és el període de x (i.e. un punt té període exactament n si la seva òrbita té exactament n punts diferents). Al conjunt de punts $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ li diem n -cicle. Noteu que si tenim un cicle de període n , vol dir que tenim un punt fix de l'aplicació f^n .

Definició 2.1.4. Sigui \bar{x} un punt fix de f_μ una funció de classe \mathcal{C}^1 . Es diu que \bar{x} és un punt hiperbòlic si $|f'_\mu(\bar{x})| \neq 1$.

Definició 2.1.5. Sigui \bar{x} un punt fix de f_μ una funció de classe \mathcal{C}^1 . Es diu que \bar{x} és un punt fix atractor per a tot entorn U de \bar{x} , hi ha un entorn V del punt \bar{x} tal que els iterats de tot punt de V no surten de U i tendeixen cap a \bar{x} . Si $|f'_\mu(\bar{x})| < 1$, llavors és atractor, però hi ha atractors on la derivada té mòdul 1.

Definició 2.1.6. Sigui x un punt periòdic de període n . És diu que x és atractor si és un punt fix atractor de f_μ^n . Si $f_\mu \in \mathcal{C}^1$ i $|(f_\mu^n)'(x)| < 1$, llavors x és un punt periòdic atractor, però hi ha atractors on la derivada té mòdul 1. També es coneix aquest concepte com òrbita atractora, ja que per qualsevol punt $y = f_\mu^j(x)$ per $j < n$ de l'òrbita de x , $|(f_\mu^n)'(y)| = |(f_\mu^n)'(x)|$, perquè es només una permutació dels índexs:

$$(f_\mu^n)'(x) = f'_\mu(f_\mu^{n-1}(x)) \cdots \underbrace{f'_\mu(f_\mu^j(x))}_{f'_\mu(y)} \cdots f'_\mu(x).$$

De la mateixa manera que amb els punts fixos atractors, que hi hagi un cicle atractor vol dir que existeix un entorn del cicle de tal manera que si x està en aquest entorn, llavors l'òrbita de x tendeix cap al cicle atractor.

Definició 2.1.7. Sigui \bar{x} un punt fix de f_μ una funció de classe \mathcal{C}^1 . Es diu que \bar{x} és un punt fix repulsor si existeix un entorn U de \bar{x} tal que si $x \in U$, $x \neq \bar{x}$, llavors existeix $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$. A més, si $|f'_\mu(\bar{x})| > 1$, llavors \bar{x} és repulsor, però hi ha repulsors on la derivada té mòdul 1.

Definició 2.1.8. Sigui x un punt periòdic de període n de f_μ . És diu que x és repulsor si és un punt fix repulsor de f_μ^n . Si $f_\mu \in \mathcal{C}^1$. Si $|(f_\mu^n)'(x)| > 1$, es diu que x és un punt periòdic repulsor, però hi ha repulsors on la derivada té mòdul 1.

Definició 2.1.9. Sigui \bar{x} un punt fix de f_μ una funció de classe \mathcal{C}^1 . Es diu que \bar{x} és un punt fix superestable si $|f'_\mu(\bar{x})| = 0$. Noteu que un punt fix superestable també és atractor.

Definició 2.1.10. Sigui x un punt periòdic de període n de $f_\mu \in \mathcal{C}^1$. Es diu que x és un punt periòdic superestable si $|(f_\mu^n)'(x)| = 0$. També es pot dir, amb el raonament anterior, òrbita superestable. Noteu que una òrbita superestable és també atractora.

Les bifurcacions que s'estudien en aquest treball són les que apareixen quan $(f_\mu^n)'(x) = -1$ (teorema 1.0.3)

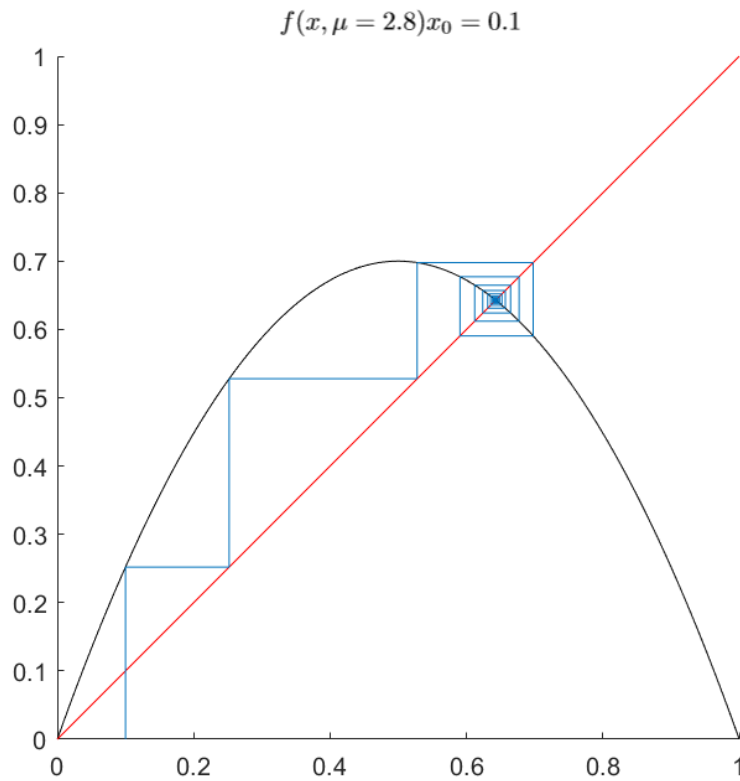


Figura 5: $f_{2.8}^n(0.1)$ tendeix a un punt fix

2.2 L'aplicació logística i el doblament de període

Com hem comentat a la introducció, el sistema dinàmic discret (o mapa)

$$f_{\mu}(x_n) = \mu x_n(1 - x_n) \quad (1)$$

és conegut com aplicació logística. La seqüència de les seves iteracions és, donat un punt inicial x_0 ,

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{\mu}(x_0) \\ x_2 &= f_{\mu}(x_1) = f(f(x_0)) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f_{\mu}(x_n) = f_{\mu}(f_{\mu}(\dots f_{\mu}(x_0))) = f_{\mu}^n(x_0) \end{aligned}$$

on $f^n(x_0)$ es la composició. Les successives iterades f_{μ}^n són, per tant, polinomis de grau 2^n .

Els iterats x_n es poden seguir mitjançant un procediment gràfic molt senzill, que consisteix en dibuixar $y = f_{\mu}(x)$ i la recta $x = y$ al mateix gràfic i moure's horitzontal i verticalment de forma successiva entre aquestes dues corbes (veure figura 5). D'aquesta obtenim els iterats x_0, x_1, x_2, \dots . El punt en que la corba i

la línia s'intersequen correspon a un punt fix en la seqüència. Els punts fixos es poden determinar fàcilment resolent l'equació

$$\bar{x} = \mu\bar{x}(1 - \bar{x})$$

que te dues solucions, $\bar{x} = 0$ i $\bar{x} = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Per tal que $f : I \rightarrow I$, és a dir, deixi l'interval $I = [0, 1]$ invariant, necessitem que $0 \leq \mu \leq 4$, per tant ens restringirem a aquests valors de μ . Així, per $\mu \leq 1$, l'únic punt fix és $\bar{x} = 0$, i per $1 < \mu \leq 4$, $\bar{x} = 0$ i $\bar{x} = \frac{\mu-1}{\mu}$ els dos ho poden ser. Aquests punts poden atractors o repulsors, segons la definició 2.1.5 o 2.1.7. Fent un calcul analog, o bé per procediment gràfic s'obtenen els següents resultats:

- $\bar{x} = 0$ és atractor per $0 < \mu < 1$ i repulsor per $\mu > 1$.
- $\bar{x} = \frac{\mu-1}{\mu}$ no pertany a $[0,1]$ a $0 < \mu < 1$ i és atractor per $1 < \mu < 3$ (en aquest cas sí que pertany a $[0,1]$).

Es pot provar que aquest punts són atractors globals, per tant, el comportament per $0 < \mu < 3$ és conegut: per $\mu < 1$, totes les iteracions de punts de l'interval $[0, 1]$ convergeixen al punt fix estable $\bar{x} = 0$, i per $1 < \mu < 3$ totes convergeixen al punt fix $\bar{x} = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Per $\mu > 3$ podria semblar, a primera vista, que no hi ha punts atractors. De fet, el que ha passat es que el punt fix $\bar{x} = \frac{\mu-1}{\mu}$ s'ha convertit en repulsor (en aquest punt $f'_\mu(\bar{x}) = -1$ i s'ha bifurcat en un 2-cicle atractor, pel teorema 1.0.3.

Aquest dos punts del cicle estable són punts fixos estables de la funció composta

$$f_\mu^2 = f_\mu(f_\mu(x)).$$

L'aspecte d'aquest dos punts fixos es pot analitzar examinant els gràfics de f_μ i f_μ^2 (vegeu figura 8). Arribats a aquest punt, podríem repetir el procés, considerant una nova funció F_μ que sigui la funció f_μ^2 , així obtindríem dues bifurcacions de la funció F_μ (una per a cada punt fix), obtenint un cicle de període 2 per F_μ , que vol dir un de període 4 de f_μ . Així anirem observant com es produeixen doblaments de període per a certs valors de μ , que van creixent. Aquests valors tenen un límit μ_∞ . Tant els valors de μ pels quals tenim una bifurcació, com el valor μ_∞ , depenen de la funció f_μ considerada però el comportament qualitatiu no canvia sempre que sigui unimodal.

Històricament l'estudi d'aplicacions unimodals s'ha dut a terme amb la derivada de Schwarz.

Definició 2.2.1. Donada una funció $f \in \mathcal{C}^3$, $f'(x) \neq 0$, es defineix la derivada de Schwarz com

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Si hi ha doblament de període, la derivada de Schwarz és negativa, perquè apareix de forma natural a la demostració de 1.0.3¹. Una propietat essencial de la derivada de Schwarz és la següent:

Proposició 2.2.2. Siguin f i g dos funcions \mathcal{C}^3 . Si $Sf < 0$ i $Sg < 0$, llavors $S(f \circ g) < 0$

¹La demostració del teorema 1.0.3 que apareix en aquest treball a l'apèndix 7.5 no inclou la part on apareix la derivada de Schwarz. Per veure una demostració on sí que apareix la derivada de Schwarz, consulteu [5]

Demostració. Usant la regla de la cadena, calculem:

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

i també:

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)$$

Amb això, fent una mica d'àlgebra:

$$S(f \circ g) = Sf(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + Sg(x)$$

Per tant $S(f \circ g) < 0$. □

Aquesta propietat resulta molt important perquè la conseqüència immediata és que $Sf^n < 0$. Això vol dir, que també per f^n que la derivada de Schwarz és negativa.

Cal destacar que l'any 2000 es va publicar [11], on s'explica que la condició de derivada de Schwarz negativa és redundant en el cas de les funcions \mathcal{C}^3 unimodals, però les dues definicions s'han inclòs al treball perquè la literatura és plena de referències a aquestes dues propietats per separat, i encara se segueixen considerant independents en articles més recents, perquè molts autors encara no saben que són condicions redundants. A partir d'ara, per tant, ens referirem a les aplicacions amb les que treballem com aplicacions unimodals, sense parlar de la derivada de Schwarz.

Les funcions unimodals són les que va considerar Feigenbaum per el seu primer estudi sobre turbulències, a partir de l'article [14].

Qualsevol aplicació amb aquestes propietats serveix per fer una anàlisi anàleg al que es farà a continuació (també l'aplicació $x_{n+1} = \mu \sin(\pi x_n)$ esmentada per Feigenbaum a la introducció). S'ha triat l'aplicació logística perquè és la que s'ha utilitzat històricament i la que va portar a descobrir els resultats que es presenten a continuació. Recordeu que la constant δ de Feigenbaum canvia si no considerem mapes amb un màxim quadràtic (és a dir, $f''(c) < 0$, on c és el punt crític). També canvia la constant α , perquè la renormalització té una altra escala. Si haguéssim considerat una aplicació unimodal amb $f''(c) = 0$ i $f^{(4)}(c) < 0$, la constant δ que obtindríem seria $\delta \approx 7.29$. Algunes d'aquestes constants han sigut calculades i es poden trobar a [2], però no es calculen en aquest treball.

3. Renormalització

El procés de la renormalització es basa en què quan un composita una funció unimodal amb si mateixa i reescala de manera adient, s'obté una nova funció molt similar a l'original. Renormalització fa referència a aquest reescalat.

La renormalització, tal com la va introduir Feigenbaum, és un raonament heurístic. En cap moment va provar l'existència dels límits que hi apareixien. De totes maneres, sí que va afirmar que les constants que hi apareixien eren universals pel motiu següent. El procés de renormalització aplicat a les f_μ porta a la definició d'un operador funcional T que no depèn de la família f_μ escollida per fer els límits. Aquest operador involucra les constants α i δ . Per aquest motiu, són universals.

Les proposicions 3.4.2 i 3.4.3 proven que la teoria de renormalització és correcta i permeten explicar l'aparició de la constant δ a la cascada de bifurcacions. Aquestes proposicions diuen que com la funció

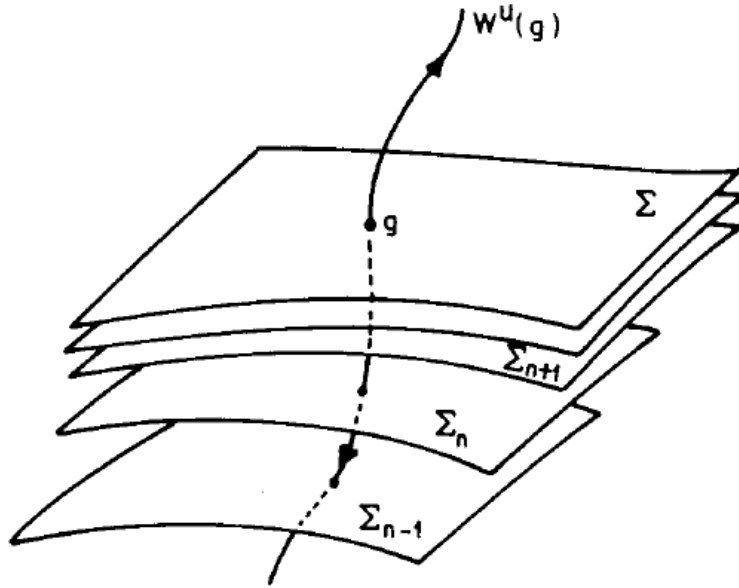


Figura 6: Detall del punt fix g i la varietat inestable $W^u(g)$. La varietat travessa les superfícies Σ_n pels punts g_n . Imatge procedent de [9].

g és un punt fix hiperbòlic de l'aplicació T , es pot definir una varietat estable y una varietat inestable. La varietat inestable passa per les funcions g_i , que viuen en unes superfícies Σ_i (vegeu la figura 6). El quocient de distàncies entre aquestes superfícies és precisament la constant universal δ .

Pel següent anàlisi considerarem la següent notació:

- μ_n el valor del paràmetre μ on apareix, per primer cop, una bifurcació amb la que passem d'un cicle atractor de període 2^{n-1} a un cicle atractor de període 2^n . Aquests són els valors de μ que defineixen la constant de Feigenbaum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta.$$

- μ_n^s el valor del paràmetre μ on apareix, per primer cop, un cicle superestable de període 2^n .
- $f(x, \mu) = f_\mu(x)$, perquè en considerar orbites superestables resultarà més clar.

3.1 Experiments numèrics

Resulta convenient considerar els valors de μ superestables en comptes dels valors pels quals es produeix una bifurcació, perquè resulten molt més fàcils de calcular. Això és degut a que per un punt superestable, l'expansió de Taylor té el terme lineal 0, per definició de punt superestable, per tant la convergència a aquest punt, que és atractor, resulta molt més ràpida. En aquesta secció s'explica perquè sempre es pot trobar un valor de μ superestable per qualsevol període, i, a més, s'expliquen les evidències numèriques en les que ens basem per poder considerar valors de μ superestables.

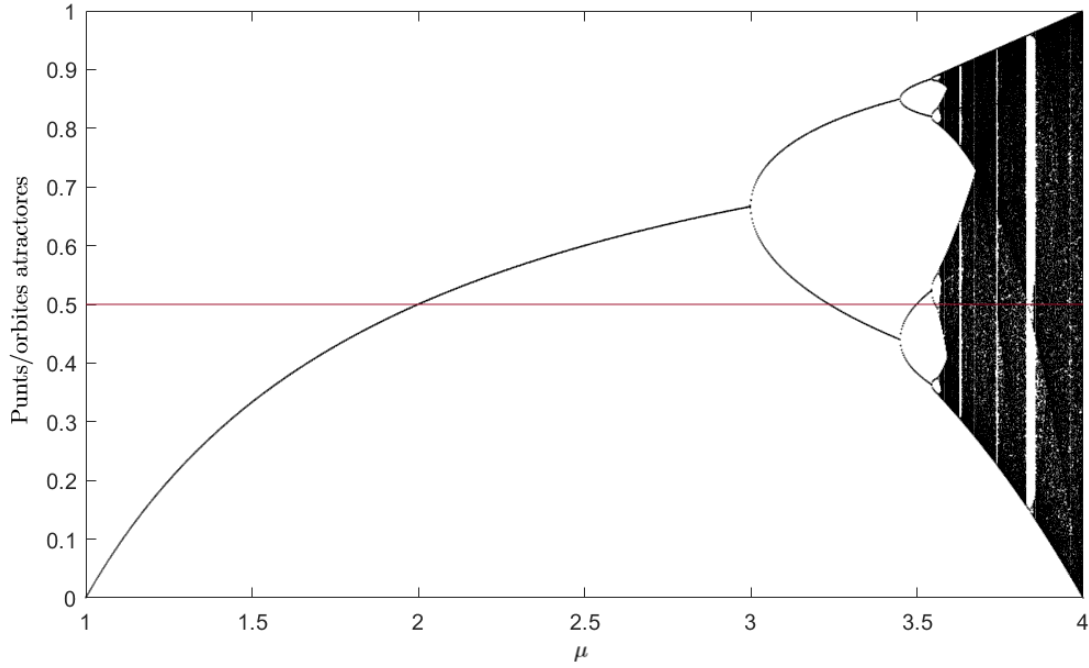


Figura 7: Bifurcacions i cicles superestables. Els valors de μ superestables es donen quan la recta $y = 0.5$ interseca el diagrama de bifurcació.

Lema 3.1.1. $\mu_i < \mu_i^s < \mu_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$ (vegeu figura 7).

Demostració. Considerem $f^{2^i}(x, \mu)$, amb $\mu \in [\mu_i, \mu_{i+1}]$, perquè així el cicle atractor de 2^i elements el podem considerar com un punt fix atractor \bar{x} de f^{2^i} (vegeu figura 8). Com el punt és atractor, es té $\left| \left(f^{2^i}(\bar{x}, \mu) \right)' \right| < 1$. Per tant tenim:

$$-1 < \left(f^{2^i}(\bar{x}, \mu) \right)' < 1 \quad \text{a } \mu \in (\mu_i, \mu_{i+1}). \quad (2)$$

Quan μ tendeix a μ_{i+1} apareix una bifurcació, i sabem pel teorema 1.0.3 que $\left(f^{2^i}(\bar{x}, \mu_{i+1}) \right)' = -1$. Per valors més petits de μ_i ja no existeix aquest cicle atractor, és a dir, ja no és compleix la condició d'estabilitat (2), però com no ha aparegut cap bifurcació, l'única opció és que:

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_i^+} \left(f^{2^i}(\bar{x}, \mu) \right)' = 1.$$

En aquest cas, és necessari escriure la condició d'inestabilitat en forma de límit perquè el cicle no existeix abans de μ_i , ja que es crea amb la bifurcació que es produeix a μ_i . Així doncs, per ser $f^{2^i}(\bar{x}, \mu_{i+1})$ continua en μ ha d'existir un valor μ_i^s on la derivada de la funció pren el valor 0, que és el cicle superestable. \square

Això fa que:

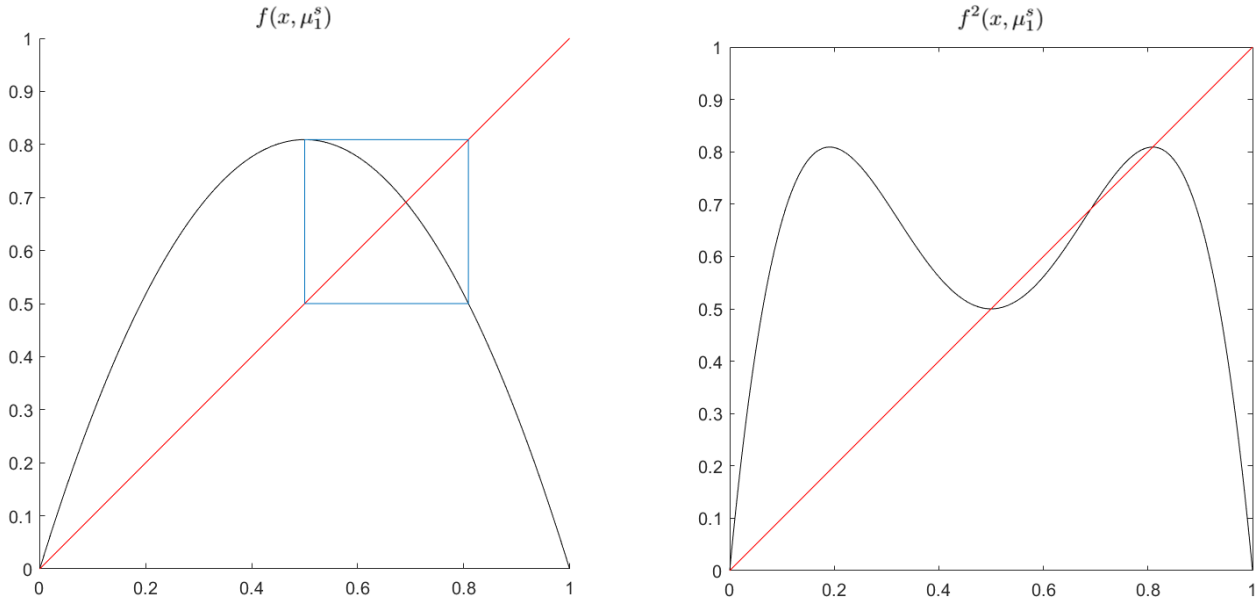


Figura 8: Un dos cycle a f passa a ser un punt fix si considerem f^2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i^s = \mu_\infty,$$

és a dir, convergeixen al mateix valor. Per tant $\mu_\infty = \mu_\infty^s$, essent $\mu_\infty^s = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i^s$.

A més, Feigenbaum va trobar evidències numèriques a [8] de que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^s - \mu_{n-1}^s}{\mu_{n+1}^s - \mu_n^s} = \delta.$$

Per tant, la relació entre les distàncies que separen els cicles superestables és la mateixa que la que separa les bifurcacions. Una explicació intuïtiva, proposada a [4], d'aquest fet és que, si considerem un altre paràmetre $M = M(\mu)$ que satisfaci $\mu_i^s = M_i = M(\mu_i)$, llavors l'expansió de Taylor al punt $\mu_\infty = 3.57\dots$ és

$$M(\mu) = M(\mu_\infty) + (\mu - \mu_\infty)M'(\mu_\infty) + (\mu - \mu_\infty)^2 \frac{M''(\mu_\infty)}{2} + \dots$$

llavors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\mu_n) - M(\mu_{n-1})}{M(\mu_{n+1}) - M(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta.$$

L'existència de l'expansió de Taylor d'aquesta funció, però, no s'ha demostrat.

Aquest és el motiu pel qual es pot fer l'anàlisi numèric en funció del paràmetre μ^s o del paràmetre μ . Feigenbaum el va fer en funció de les μ^s per raons de convergència, ja que tenim convergència quadràtica als cicles superestables.

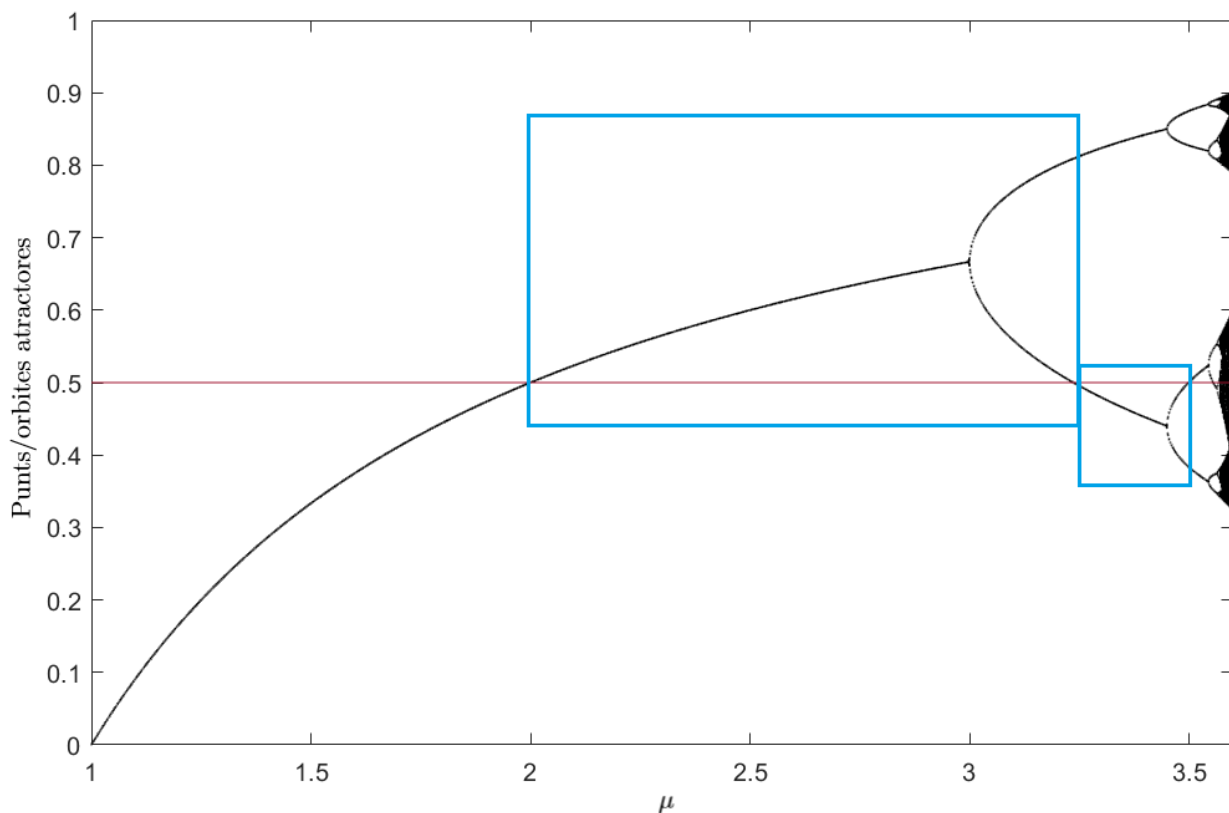


Figura 9: Volem estudiar les successives finestres renormalitzant una en l'altra.

3.2 Teoria de la renormalització i universalitat

Si s'observa el diagrama de bifurcacions de f_μ , és pot veure que té una estructura fractal, és a dir, la seva estructura es repeteix encara que es canviï l'escala. És d'aquí d'on surt la idea de renormalització. L'objectiu següent és comparar la situació a dos μ 's diferents canviant l'escala, és a dir, renormalitzar una en un altra (figura 9).

Com es pot apreciar a la figura 10, les dues figures tenen la mateixa forma (la de la dreta i la de l'esquerra). És per això que la idea és que $f^2(x, \mu_1^s)$ té la mateixa dinàmica local que $f(x, \mu_0^s)$, excepte perquè està girada i es tracta d'un domini més petit. És per això que s'haurà de reescalar el domini. Aquí és on apareix la constant $\alpha = -2.5...$ que es defineix com l'escala relativa entre dos bifurcacions (vegeu figura 11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha \quad (3)$$

on d_n és l'amplada amb signe de les branques més properes a x_{max} (el màxim de la funció f , en el cas de l'aplicació logística $x_{max} = \frac{1}{2}$) amb $\mu = \mu_n$ (marcat en color blau a la figura 11). De la mateixa manera que passa amb δ , la constant α també es pot calcular mitjançant els cicles superestables (marcat en color verd a la figura 11). Aquesta és la intuïció que motiva les idees que es presenten a continuació.

En aquest punt és millor fer un canvi de variable, perquè com es veurà després, les equacions de la

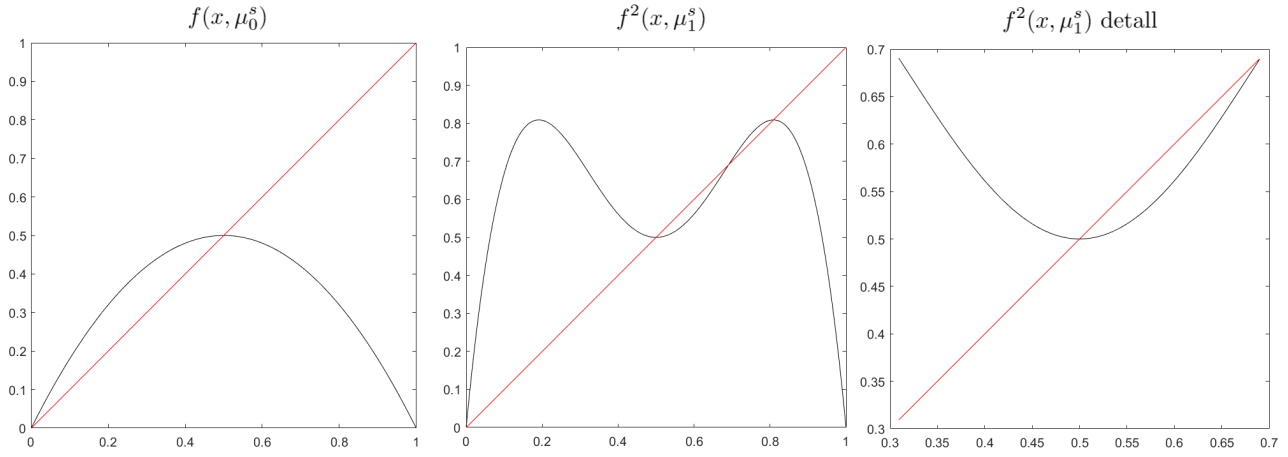


Figura 10: La idea és escalar i donar la volta al “zoom” de la gràfica de $f^2(x, \mu_1^s)$, on μ_1^s correspon al valor de μ per qual tenim el 2-cicle superestable, per a obtenir una funció semblant a $f(x, \mu_0^s)$

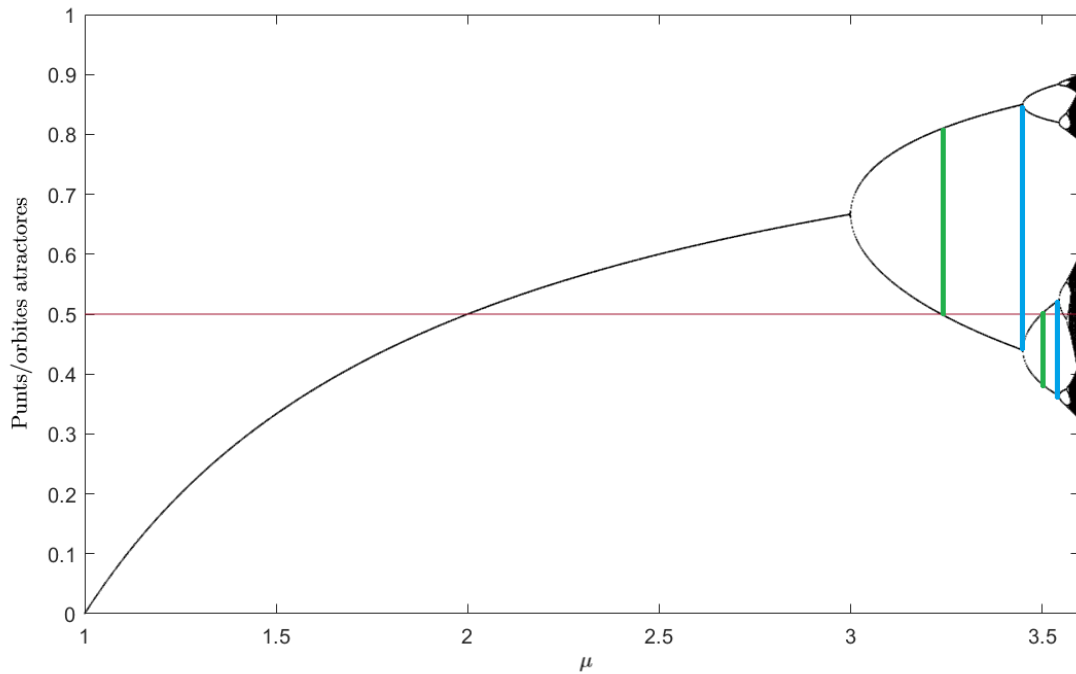


Figura 11: En blau, la distància d_n de la definició d' α . En verd, la distància entre els dos punts més propers d'un cicle superestable.

renormalització estan centrades en 0. Per tant considerem el canvi de variable $h(x) = x - \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & x \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ y & \xrightarrow{\tilde{f}} & y \end{array}$$

Aquest canvi l'únic que fa és centrar la paràbola al 0. Per tant, a partir d'ara és treballa amb la nova $\tilde{f}(y) = (h \circ f \circ h^{-1})(y)$. Tot i així, per simplicitat ja que només es tracta d'una translació, a partir d'ara aquesta nova \tilde{f} s'anomenarà f i a la variable es seguirà dient x .

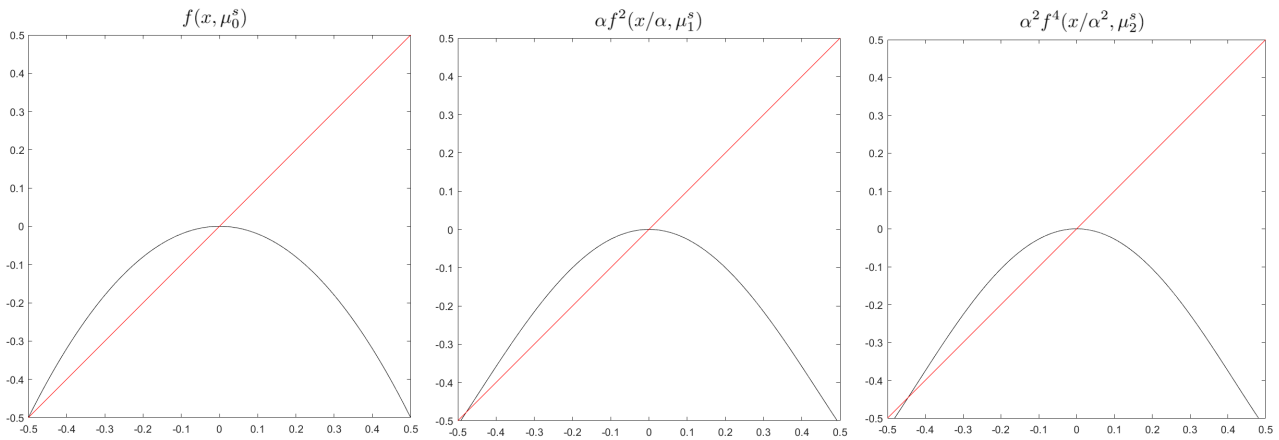


Figura 12: Renormalitzacions

Amb la mateixa argumentació anterior per la nova f , podem aplicar la idea de la renormalització. El reescalament amb α , corresponent a la figura 12 seria el següent:

$$f(x, \mu_0^s) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, \mu_1^s\right). \quad (4)$$

En resum, f s'ha renormalitzat prenent el seu segon iterat, reescalant $x \rightarrow x/\alpha$ i desplaçant μ al següent valor superestable. Aquesta “equació” és el precedent de l'equació de punt fix que veurem més endavant. Es pot apreciar que la funció reescalada té la mateixa forma que la funció original (figura 12). Però com hem renormalitzat un cop, tornem a tenir la forma del principi, si tornem a compondre la funció amb si mateixa, podem aplicar la mateixa lògica. Així, obtenim les següents aproximacions:

$$f(x, \mu_0^s) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, \mu_1^s\right) \approx \alpha^2 f^4\left(\frac{x}{\alpha^2}, \mu_2^s\right) \approx \dots \approx \alpha^n f^{2^n}\left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_n^s\right). \quad (5)$$

Amb això, Feigenbaum va portar el procés al límit numèricament i va veure que convergia sempre que α es triï correctament. De fet, veurem també la universalitat de la constant α .

Per tant, portant (5) al límit es té

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n}\left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_n^s\right) = g_0(x). \quad (6)$$

La funció g_0 és una funció que sembla una paràbola, igual que les funcions renormalitzades $\alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_n^s \right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es tracta d'una funció amb un punt fix superestable. La funció g_0 és, per l'argument de la restricció a intervals cada vegada més petits al voltant del seu màxim, el límit universal dels iterats de f amb un màxim quadràtic. De fet, es pot comprovar numèricament que g_0 de (6) és sempre la mateixa funció independentment de la f triada. Per tant, el mateix procés es podria seguir amb el mapa del sinus i s'arribaria al mateix resultat.

La funció $g_0(x)$ és universal perquè només depèn del comportament de f a prop del màxim (en el cas de l'aplicació logística $x = 1/2$, o bé 0 després del canvi de variables). El que importa és la natura del màxim. En aquest cas, és un màxim quadràtic (és a dir $f''_\mu(x_{\max}) < 0$). L'aspecte global de f es perd en el procés i l'únic que sobreviu és l'ordre del màxim, és per això que es troben diferents g_0 per funcions amb un màxim de grau diferent.

3.3 L'equació de punt fix

Podem obtenir altres funcions $g_i(x)$ si comencem el procés amb $f(x, \mu_i^s)$ enlloc d'amb $f(x, \mu_0^s)$, llavors tindrem:

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_{n+i}^s \right). \quad (7)$$

Notem que per (7) tenim:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_{n+i-1}^s \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \alpha^{n-1} f^{2^{n-1}+1} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{x}{\alpha^{n-1}}, \mu_{n+i-1}^s \right). \end{aligned}$$

Llavors, si $m = n - 1$:

$$f^{2^{n-1}+1} = f^{2^{m+1}} = f^{2^m}(f^{2^m}).$$

Per tant:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \alpha^m f^{2^m} \left(\underbrace{\frac{1}{\alpha^m} \alpha^m f^{2^m} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{x}{\alpha^m}, \mu_{m+1}^s \right)}_{g_i\left(\frac{x}{\alpha}\right)}, \mu_{m+1}^s \right) \\ &= \alpha g_i \left(g_i \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

Per tant tenim la relació:

$$g_{i-1}(x) = \alpha g_i \left(g_i \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right). \quad (8)$$

Si definim l'operador T com

$$Tg(x) = \alpha g^2 \left(\frac{x}{\alpha} \right), \quad (9)$$

prenent el límit $i \rightarrow \infty$ a (7) i també definint:

$$\begin{aligned} g_{\infty}(x) &= \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, \mu_{\infty}^s \right) \end{aligned} \quad (10)$$

podem concloure que g_{∞} , que s'anomena habitualment com g , és un punt fix de l'operador T :

$$g(x) = Tg(x).$$

O en termes de g i α :

$$g(x) = \alpha g^2 \left(\frac{x}{\alpha} \right) \quad (11)$$

És a dir, la funció renormaliza en si mateixa. Aquesta equació funcional es coneix com l'equació de Feigenbaum - Cvitanović, perquè concretament va ser descoberta per Pedrag Cvitanović mentre discutia amb Feigenbaum.

Aquesta és una equació funcional per $g(x)$ i el factor d'escala universal α . Ja no depèn de f per si mateixa.

L'equació funcional no és complerta fins que especifiquem les condicions de contorn a $g(x)$. Després del canvi d'origen, totes les funcions unimodals que s'han anat obtenint tenen un màxim en $x = 0$, per tant, es necessita $g'(0) = 0$. A més, podem establir $g(0) = 1$ sense pèrdua de generalitat. Això només defineix l'escala de x : si $g(x)$ és una solució de (11), també ho és la funció $\lambda g(x/\lambda)$ per la mateixa α .

Observeu que podem treure el valor de α a partir de g . En efecte, a $x = 0$ l'equació funcional queda

$$g(0) = \alpha g(g(0)).$$

Però $g(0) = 1$, així que $1 = \alpha g(1)$, per tant:

$$\alpha = \frac{1}{g(1)}. \quad (12)$$

Això mostra que α està determinada per g . El grau de degeneració del punt crític de la funció g és invariable sota l'acció de T , és a dir, com que g té un màxim quadràtic Tg també, perquè $g = Tg$. Per això, la forma de les solucions de l'equació funcional depèn del grau de degeneració del punt crític. Obviament, les solucions de l'equació de punt fix $g = Tg$ seran diferents segons si es busquen amb màxim o mínim o (inclús) amb màxim o mínim degenerat. També les constants α, δ .

El que veurem és que aquesta és la única dependència que tenen les funcions g respecte la nostra aplicació inicial f . Nosaltres ens restringirem al cas que f (i per tant g) tingui un màxim quadràtic. Podeu veure una llista de constants a [2].

Observació: La funció g és suau i és una funció en termes de x^2 . Aquesta afirmació està demostrada rigorosament al teorema 8.14 de [16]. Una idea intuïtiva per entendre aquest fet és pensar que g , com és unimodal, la forma més senzilla que pot tenir és $g(x) = 1 + bx^2$. Però en aplicar l'operador T un cop, com g és un punt fix, $g = Tg = 1 + b'x^2 + cx^4$. Com que T es pot aplicar de manera indefinida, g és una funció en termes de x^2 .

Amb aquestes especificacions, (11) té una solució única. La demostració amb el teorema del punt fix de Schauder, es fa a la secció 4.

3.4 La constant universal δ

L'operador T és un operador funcional definit en l'espai de les funcions analítiques. Com que g és el límit de la seqüència g_i , podem linealitzar l'operador T al voltant del seu punt fix per veure la seva estabilitat. Però es clar que T és inestable a g , perquè en termes de T , l'equació (8) es pot escriure com

$$g_{i-1} = Tg_i \quad (13)$$

Llavors, per (10), per valors suficientment grans de i , g_i és un punt arbitràriament proper a g , però per (13) les successives iteracions de g_i per T s'allunyen de g fins que arriben a g_0 . Com d'inestable és T ?

Sigui \mathcal{H} l'espai de Banach amb la norma del suprem de funcions analítiques reals (i.e. valors reals a l'eix real) i fitades en un cert veïnat complex de l'interval $I = [-1, 1]$. Sigui \mathcal{H}_∞ el subespai de \mathcal{H} format per les funcions que satisfan les condicions $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ i $f''(0) \neq 0$.

Noteu que l'interval $I = [-1, 1]$ no és el mateix d'abans. Això és simplement un conveni perquè els coeficients de g siguin sempre els mateixos i no s'hagin de realitzar canvis de variable entre diferents estudis. Això no és res nou, perquè ja s'ha fet anteriorment fixant $g(0) = 1$.

Es presenten ara dos proposicions de [16]: la primera per veure quina relació hi ha entre δ i la funció g , i la segona per entendre com els valors de μ_i de les funcions unimodals tendeixen a μ_∞ amb raó δ^{-1} . Considerem primer les següents definicions:

Definició 3.4.1. Sigui X un espai de Banach. Sigui $f : U \subset X \rightarrow U$ un difeomorfisme i $p \in U$ un punt fix hiperbòlic. Donat $\rho > 0$, els conjunts estable i inestable locals de p , $W_{\rho,loc}^s$ i $W_{\rho,loc}^u$ són

$$W_{\rho,loc}^s(p) = \{x \in B_\rho(p) \mid f^k(x) \in B_\rho(p), \text{ per tot } k \geq 0\} = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(B_\rho(p))$$

$$W_{\rho,loc}^u(p) = \{x \in B_\rho(p) \mid f^{-k}(x) \in B_\rho(p), \text{ per tot } k \geq 0\} = \bigcap_{k \geq 0} f^k(B_\rho(p)).$$

Segons això, el conjunt estable local de p per f és el conjunt inestable local p per f^{-1} . Observi's que el conjunt estable i inestable depenen de ρ . Es pot veure que, de fet, això no té importància i es poden definir els conjunts estable i inestable de manera independent de ρ degut a la invariància de les varietats estable i inestable. A més, els conjunts estan definits localment, però en certs casos es poden estendre globalment.

Si f és un difeomorfisme de classe C^r i p un punt fix hiperbòlic amb subespais invariants E^s i E^u , llavors, pel teorema de la varietat estable [10], existeix una varietat $W_{\rho,loc}^s(p)$ de classe C^r tangent a E^s en p i invariant per f . De fet, es té que si $q \in W_{\rho,loc}^s(p)$, llavors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f^k(q) - p\| = 0$$

Noteu que aplicant el teorema a f^{-1} , hom té l'existència i regularitat de la varietat inestable.

Les definicions anteriors de varietat estable i inestable són locals, però en aquest cas, a la proposició 3.4.3 els resultats són amb varietats globals.

Proposició 3.4.2. Existeix un entorn $U(g)$ del punt g a \mathcal{H}_∞ tal que $T \in C^\infty(U(g), \mathcal{H}_\infty)$. L'operador $DT(g)$ (la linealització de T a g) és hiperbòlic i té un subespai unidimensional estable i un subespai de codimensió 1 inestable. El valor propi de $DT(g)$ al subespai inestable és $\delta = 4.669\dots$

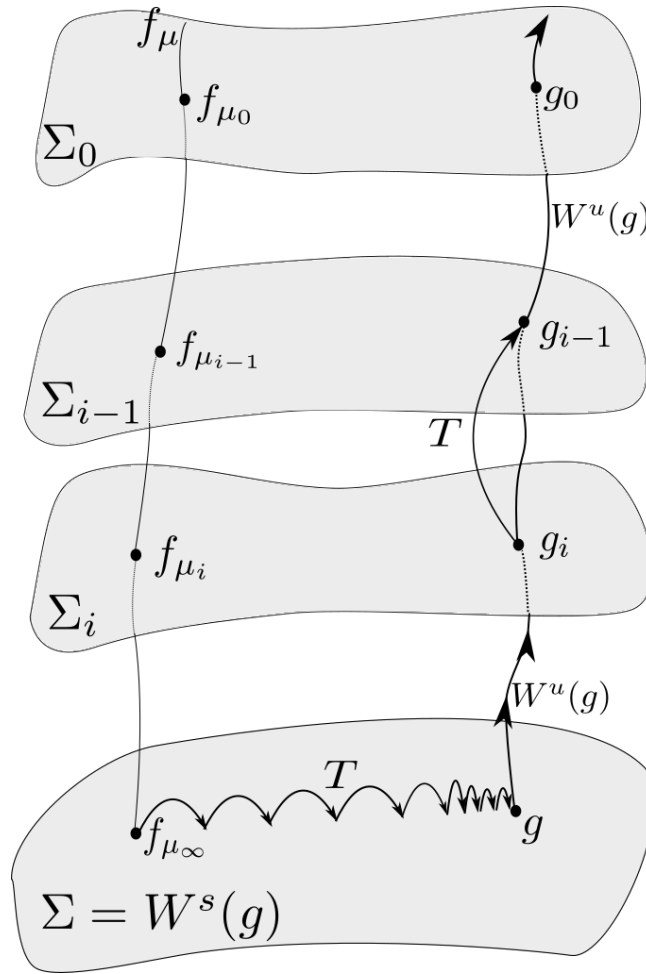


Figura 13: Esquema de l'espai on està definit l'operador T .

2 3 Sigui $\Sigma_0 \subset G$ la “superfície” formada pels mapes f tenint un punt fix $\bar{x} \in [0, 1]$ satisfent $f'(\bar{x}) = -1$ i $Sf(\bar{x}) < 0$

Proposició 3.4.3. Una “varietat” inestable local definida en un veïnat de g es pot estendre globalment a una varietat inestable global $W^u(g)$ que creua transversalment la superfície Σ_0 ; la “varietat” inestable $W^u(g)$ està formada per mapes amb la derivada de Schwarz negativa⁴.

Totes les demostracions de les proposicions 3.4.2 i 3.4.3 eren assistides per ordinador fins a l'aparició de [13] al 1999.

Amb la universalitat de g i les proposicions anteriors es pot explicar el fenomen de la universalitat de Feigenbaum. Al voltant de $U(g)$ tenim el següent esquema (vegeu figura 13): Si la família uniparamètrica de funcions f_μ , que significa una “corba” a l'espai de funcions, travessa transversalment la varietat estable $W^s(g)$, llavors travessa les superfícies $T^{-n}(\Sigma_0)$ per a n suficientment gran. Els punts f_{μ_n} d'intersecció de

²Recordem la proposició 1.0.3

³Aquí tornem a considerar les μ en comptes de μ^s per retornar a la definició inicial de δ , però el procés és igual de les dues maneres. De totes maneres, la superfície limit Σ_∞ és la mateixa per les dues μ , perquè ambdues tenien el mateix limit (μ_∞).

⁴Recordeu que aquesta condició era equivalent a ser unimodal i \mathcal{C}^3 .

la família f_μ amb $T^{-n}(\Sigma_0)$ corresponen a bifurcacions de doblament de període de cicles de període 2^n , i el punt f_{μ_∞} correspon al punt d'acumulació del conjunt de valors de bifurcació. De la mateixa manera, noteu que les interseccions de la varietat inestable $W^u(g)$ amb els Σ_i és g_i . Per tant, per n gran, la distància entre $T^{-(n+1)}\Sigma_0$ i $W^s(g)$ és, aproximadament, δ cops menor que la distància entre $T^{-n}\Sigma_0$ i $W^s(g)$. Llavors, els valors de μ pels quals tenim una bifurcació per la família f_μ satisfan la relació

$$\mu_\infty - \mu_n \simeq c_0 \delta^{-n} \quad (14)$$

on c_0 depèn de la família de mapes. Amb (14) es dedueix l'expressió més coneguda per δ que ja no depèn de c_0 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_\infty - c_0 \delta^{-n} - \mu_\infty + c_0 \delta^{-(n-1)}}{\mu_\infty - c_0 \delta^{-(n+1)} - \mu_\infty + c_0 \delta^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^{-n} - \delta^{-(n-1)}}{\delta^{-(n+1)} - \delta^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^{-(n-1)}(\delta^{-1} - 1)}{\delta^{-n}(\delta^{-1} - 1)} \\ &= \delta = 4.699... \end{aligned} \quad (15)$$

4. El punt fix

La primera demostració de que existia solució de l'equació de Feigenbaum - Cvitanović (11) va aparèixer l'any 1982 de la ma d'Oscar Eramus Lanford III⁵. Es tracta d'una prova assistida per ordinador. Dos anys més tard, va publicar una altra prova, basada en el teorema del punt fix de Schauder, tot i que també utilitza fites obtingudes computacionalment. A la prova, no es demostra que el punt fix és hiperbòlic. Es presenten a continuació els arguments de Lanford.

4.1 Introducció

A partir d'aquest punt s'utilitza la notació de l'article del Lanford. Els canvis introduïts respecte els apartats anteriors són:

- Es consideren mapes f de l'interval $[-1, 1]$ en ell mateix, i que compleixen la condició $f(0) = 1$. L'aplicació logística va de l'interval $[0, 1]$ en ell mateix i té un màxim a $x = \frac{1}{2}$, però es pot transformar en una aplicació d'aquest tipus:

$$f(x, \mu) = 1 - \mu x^2 \quad (16)$$

Fent la composició $h \circ \tilde{f} \circ h^{-1}$, amb $\tilde{f} = \gamma y(1 - y)$ l'aplicació logística, i $y = h(x) = (\frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}$ obtenim (16), amb $\mu = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma}{2}$. Per tant, com el parametre γ de l'aplicació logística estava a l'interval $[0, 4]$, el nou paràmetre μ del nou mapa (16) està entre 0 i 2.

Aquesta nova aplicació té les mateixes propietats que l'aplicació logística (perquè el canvi realitzat és un canvi afí).

⁵Lanford va publicar diferents articles relacionats amb el doblament de període i ha sigut una figura clau en el desenvolupament de tota aquesta teoria. Va morir en 2013 després d'una vida dedicada a les matemàtiques.

- El paràmetre $\alpha = -2.5 \dots$ s'expressa a la prova com $-\frac{1}{\lambda} \approx 0.40$
- Cal recordar el paràmetre μ que s'utilitza a la demostració no te res a veure amb el que s'ha considerat prèviament.

Així doncs, l'objectiu és demostrar l'existència d'una solució parell de l'equació funcional de Feigenbaum-Cvitanović

$$g(x) = -\frac{1}{\lambda}g(g(-\lambda x)), \quad g(0) = 1, \quad (17)$$

amb

$$g''(0) < 0 \quad \text{i} \quad \lambda \equiv -g(1) > 0. \quad (18)$$

Com ja s'ha dit a la secció 3.4 es treballa en l'espai de funcions f parells que van de l'interval $[-1, 1]$ en ell mateix i que satisfan la condició $f(0) = 1$, expressades com funcions de x^2 . Com que s'està treballant amb x^2 com a variable independent, l'operador de renormalització te la forma:

$$Tf(x) = -\frac{1}{\lambda}f\left([f(\lambda^2 x)]^2\right), \quad \lambda \equiv -f(1) \quad (19)$$

S'escriurà, per facilitar la notació posterior, \bar{f} per referir-se a la imatge de f per l'operador funcional T . Si es defineix μ per:

$$f'(0) = -(1 + \lambda + \mu)$$

i s'escriu:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\equiv 1 - (1 + \lambda)x - \mu x(1 - x), \\ f_1(x) &\equiv f(x) - f_0(x), \end{aligned} \quad (20)$$

llavors

$$f_1(0) = f_1(1) = f_1'(0) = 0.$$

Per tant f_1 esta unívocament determinada per la seva tercera derivada. Es denota $f_1'''(x) = f'''(x)$ per $h(x)$. La tripleta (λ, μ, h) serviran com a coordenades per l'espai de mapes en el qual es treballarà. Bàsicament, h serà una funció analítica definida en un entorn complex de $[0, 1]$, però per la majoria de l'argument es pot prendre h com una funció continua a $[0, 1]$. S'escriurà $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h)$, $\bar{\mu}(\lambda, \mu, h)$, $\bar{h}(\lambda, \mu, h)$ per les coordenades de $\bar{f} = Tf$

La relació que associa amb qualsevol funció continua h en $[0, 1]$ una única funció f_1 tal que

$$f_1'''(x) = h(x) \quad \text{i} \quad f_1(0) = f_1(1) = f_1'(0) = 0.$$

és lineal i es pot escriure com un operador integral

$$f_1(x) = \int_0^1 K(x, y)h(y)dy \quad (21)$$

amb nucli $K(x, y)$, que és pot escriure explícitament (vegeu Secció 4.2). Per simplificar la notació, l'operador (21) es denotara únicament per K , és a dir, s'escriurà $f_1 = Kh$ en comptes de (21). Llavors, la f corresponent a la tripleta (λ, μ, h) és pot escriure com

$$f(x) = 1 - (1 + \lambda + \mu)x + \mu x^2 + Kh(x) \quad (22)$$

Per tant, estem en la situació següent:

$$(\lambda, \mu, h) \longrightarrow f \longrightarrow \bar{f} = Tf \longrightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{h})$$

Com que l'operador de renormalització T és expansiu en una direcció, no hi ha cap veïnat del punt fix que sigui invariant per T . Per arribar a una situació en que es pugui aplicar el teorema del punt fix de Schauder, introduïm un operador auxiliar amb un problema de punt fix equivalent però que admet petits entorns invariants al voltant del punt fix que s'està buscant. Aquest operador només actuarà sota la coordenada h i serà construït de la següent manera:

- Primerament es mostra que, per a cada h en un domini adequat, el parell d'equacions

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) &= \lambda \\ \bar{\mu}(\lambda, \mu, h) &= \mu, \end{aligned}$$

té una única solució $(\lambda^*(h), \mu^*(h)) \approx (0.4, 0.1)$. Per fer-ho, s'utilitzarà el teorema de la funció implícita.

- L'operador auxiliar es defineix per mapejar h cap a $h^* \equiv \bar{h}(\lambda^*(h), \mu^*(h), h)$. Per tant

$$h \longrightarrow (\lambda^*(h), \mu^*(h), h) \longrightarrow f \longrightarrow \bar{f} = Tf \longrightarrow (\lambda^*(h), \mu^*(h), \bar{h}) \longrightarrow \bar{h}. \quad (23)$$

- Els punts fixos d'aquest operador corresponen a punts fixos de l'operador de renormalització.

Amb això, l'objectiu és poder aplicar el teorema de Schauder:

Teorema 4.1.1. *Sigui X un espai de Banach, i sigui C un conjunt no buit, tancat i convex de X . Sigui $F : C \rightarrow C$ una aplicació continua i compacta (i.e., la imatge de conjunts fitats són conjunts relativament compactes). Llavors F té un punt fix a C .*

La demostració d'aquest teorema la podeu trobar a l'apèndix 7.5. Per poder aplicar el teorema són necessaris uns lemes tècnics, que serviran per demostrar que l'operador auxiliar està ben definit. Es provarà:

Lema 4.1.2. *Sigui $h \in \mathcal{C}$, $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà*

$$0 \leq h(x) \leq 0.32(1 - 0.36x) \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1 \quad (24)$$

Llavors existeix un únic parell (λ^, μ^*) amb*

$$0.396 \leq \lambda^* \leq 0.4031, \quad 0.09 \leq \mu^* \leq 0.16$$

tal que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\lambda^*, \mu^*, h) &= \lambda^* \\ \bar{\mu}(\lambda^*, \mu^*, h) &= \mu^*. \end{aligned} \quad (25)$$

A més, λ^ i μ^* varien amb continuïtat amb h .*

Aquest lema, que utilitza el teorema de la funció implícita per demostrar l'existència de $\lambda^*(h)$ i $\mu^*(h)$. Això assegura que l'operador auxiliar (23) està ben definit. L'objectiu a partir d'aquí és definir el domini d'aquest operador. Per això s'utilitzen els següents lemes:

Lema 4.1.3. Si h satisfà (24) i λ^*, μ^* són com al lema 4.1.2, llavors $h^* \equiv \bar{h}(\lambda^*, \mu^*, h)$ també satisfà (24).

Per $\delta > 0$, sigui D_δ el conjunt de nombres complexos a distància menor a δ de $[0, 1]$.

Lema 4.1.4. Si δ és suficientment petit i h és analítica en D_δ satisfent (24), i

$$|h(z)| \leq 0.32(1 - 0.36|z|) \quad \text{en } D_\delta, \quad (26)$$

llavors h^* és analítica en $D_{\frac{3}{2}\delta}$ i satisfà

$$|h^*(z)| \leq 0.32(1 - 0.36|z|) \quad \text{en } D_{\frac{3}{2}\delta}. \quad (27)$$

La relació $h \rightarrow h^*$ és continua des de l'espai de funcions analítiques a D_δ satisfent (24) i (26) a l'espai de funcions analítiques a $D_{\frac{3}{2}\delta}$ que satisfan (24) i (27), tots dos espais amb la topologia de la convergència uniforme.

Amb els lemes 4.1.2, 4.1.3 i 4.1.4, per poder aplicar el teorema del punt fix de Schauder (4.1.1) és necessari veure que F és compacte, és a dir, que $F(C)$ és compacte (ja que un conjunt relativament compacte i tancat en un espai de Banach és compacte).

Per veure que $F(C)$ és compacte necessitem el teorema d'Arzela-Ascoli:

Teorema 4.1.5. (D'Arzela-Ascoli)

Sigui $K \subset \mathbb{R}$ compacte i sigui \mathcal{F} una família de funcions reals contínues sobre K . Llavors \mathcal{F} és compacte. i.e, de qualsevol successió d'elements de \mathcal{F} se'n pot extreure una parcial uniformement convergent a un element de \mathcal{F} , si \mathcal{F} és tancat, equicontinu i puntualment fitat.

Per tant, en el nostre cas, resta veure l'equicontinuitat, és a dir, cal veure que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - y| < \delta \quad \forall x, y \quad \forall f \in F(C).$$

Amb el teorema del valor mig tenim

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| |x - y|.$$

Per fitar $|f'(\xi)|$ podem utilitzar la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Per tant, la derivada és

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} -\frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Com que podem fitar f , i γ és qualsevol corba, en particular podem triar una bola (això és possible perquè el domini $D_{\frac{3}{2}\delta}$ és més gran que D i per tant sempre es pot agafar una bola per qualsevol punt de D que es mantingui a $D_{\frac{3}{2}\delta}$), es té que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_R(z)} \left| \frac{M}{R^2} \right| dz \leq M'$$

Per tant f' fitada, llavors la família és equicontínua, i temin la compacitat de $F(C)$ per poder aplicar el teorema de Schauder.

Per tant, existeix un punt fix h^* de l'aplicació auxiliar, i per tant existeix un punt fix g de l'operador de renormalització.

Llavors, es té:

Teorema 4.1.6. *Existeix una funció g analítica definida en un entorn de $[-1,1]$, parell, amb $g(0) = 1$, i que satisfà*

$$g(x) = -\frac{1}{\lambda} g(g(-\lambda x)).$$

A més, $\lambda \equiv g(1) \in [0.396, 0.4031]$,

$$-2(1 + \lambda + 0.16) \leq g''(0) \leq -2(1 + \lambda + 0.09),$$

i, prenent $g(x) = G(x^2)$ (que es possible perquè g és parella),

$$0 \leq G'''(x) \leq 0.32(1 - 0.36x) \quad \text{per } 0 \leq 1$$

Els lemes 4.1.2, 4.1.3 i 4.1.4 es proven a la subsecció 4.4, 4.5 i 4.6, respectivament. A la secció 4.2 s'estableixen algunes propietats del nucli $K(x, y)$ definit per (21), i en la secció 4.3 es proven algunes estimacions que després s'utilitzen repetidament en altres seccions.

Durant la prova s'utilitzaran $f, \lambda, \mu, h, f_0, f_1$ tal com estan definides anteriorment. A més, s'assumeix que λ i μ son números reals que satisfan

$$0.396 \leq \lambda \leq 0.4031; \quad 0.09 \leq \mu \leq 0.16, \quad (28)$$

i h una funció continua i definida, al menys, a $[0,1]$, satisfent

$$0 \leq h(x) \leq 0.32(1 - 0.36x). \quad (29)$$

Observació: *En el curs de la prova es necessita fer un nombre considerable d'estimacions numèriques concretes. Per agafar un exemple a l'atzar: a un punt, s'utilitza el fet que, si $\lambda = 0.4031$ i $\mu = 0.16$, llavors $(1 + \lambda)\lambda^2 + \mu\lambda^2(1 - \lambda^2) < 0.2498$. Estimacions com aquesta van ser verificades amb l'ajut d'una calculadora Hewlett-Packard HP-15C. Aquesta calculadora emmagatzema i manipula números en un format de coma flotant amb deu decimals i dos dígits per l'exponent; s'assumeix que només calcula correctament les operacions de suma, resta, i multiplicació de dos operands pels quals el resultat pot ser representats exactament en aquests formats. A la pràctica, això significa que els resultats intermedis van ser arrodonits (amunt o avall, depenent en el sentit de la desigualtat que s'ha de provar) a cinc dígits abans de ser multiplicat. També, els resultats de divisions van ser verificats multiplicant després d'arrodonir. Agafant l'exemple anterior:*

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= 0.16248961 < 0.16249, \\
\lambda^2(1 - \lambda^2) &< 0.16249(1 - 0.16249) = 0.1360869999 < 0.13609, \\
\mu\lambda^2(1 - \lambda^2) &< 0.16 \cdot 0.13609 = 0.0217744 < 0.02178, \\
(1 + \lambda)\lambda^2 &< 1.4031 \cdot 0.16249 = 0.227989719 < 0.22799, \\
(1 + \lambda)\lambda^2 + \mu\lambda^2(1 - \lambda^2) &< 0.22799 + 0.02178 = 0.24977 < 0.2498.
\end{aligned}$$

Aquestes desigualtats numèriques són, sens dubte, més acurades del que s'explicita aquí, però com a contrapunt es confia poc en la correctesa de la calculadora i es prenen aproximacions que no s'han vist afectades pels problemes de l'aritmètica finita.

4.2 El nucli K

Recordeu que K be definit per (21), i ens permet poder usar la coordenada h per poder definir f en el sistema de coordenades (λ, μ, h) . En aquesta secció l'objectiu és mostrar algunes fites l'operador K .

Sigui $\theta(z) = 0$ per $z < 0$ i $\theta(z) = 1$ per $z > 0$. Es defineix la el nucli

$$K(x, y) \equiv -\frac{x^2(1 - y)^2}{2} + \frac{\theta(x - y)(x - y)^2}{2}, \quad (30)$$

on $\theta(z) = 0$ per $z < 0$ i $\theta(z) = 1$ per $z > 0$.

Noteu que $\theta'(z) = 0$ si $x \neq 0$, però θ no és derivable a $x = 0$. Tot i així, la funció $\theta(z)z^2$ és derivable dues vegades en $z = 0$. Per tant podem considerar

$$\begin{aligned}
K'(x, y) &\equiv \frac{\partial K}{\partial x} = -x(1 - y)^2 + \theta(x - y)(x - y), \\
K''(x, y) &\equiv \frac{\partial K'}{\partial x} = -(1 - y)^2 + \theta(x - y).
\end{aligned} \quad (31)$$

Si h es una funció continua en $[0, 1]$, es defineix

$$(Kh)(x) = \int_0^1 K(x, y)h(y)dy \quad (32)$$

Proposició 4.2.1. Kh és la única funció derivable tres cops en $[0, 1]$ tal que

$$Kh(0) = Kh(1) = Kh'(0) = 0, \quad (Kh)'''(x) = h(x).$$

A més

$$(Kh)'(x) = \int_0^1 K'(x, y)h(y)dy \quad (33)$$

$$(Kh)''(x) = \int_0^1 K''(x, y)h(y)dy \quad (34)$$

Demostració. Derivant sota el signe integral es demostra que Kh és dos cops diferenciable amb continuïtat i que (33) i (34) es compleixen. De (34) i de la fórmula de $K''(x, y)$, es té

$$(Kh)''(x) = \int_0^x h(y)dy - \int_0^1 (1-y)^2 h(y)dy,$$

per tant Kh és tres cops diferenciable i $(Kh)''' = h(x)$. És immediat per les definicions que $Kh(0) = Kh(1) = 0$, i per (33) es té que $(Kh)'(0) = 0$. \square

Per la següent proposició s'escriu $K'_+(x, y) = \max\{0, K'(x, y)\}$ per la part positiva de $K'(x, y)$ i $K'_-(x, y) = \max\{0, -K'(x, y)\}$ per la part negativa de $K'(x, y)$ ($K''_+(x, y)$ i $K''_-(x, y)$ respectivament per $K''(x, y)$).

Proposició 4.2.2. *Siguin $x, y \in [0, 1]$ dos punts qualssevol. Llavors,*

1. $K(x, y) \leq 0$
2. $\int_0^1 K(x, y)dy = -x^2(1-x)/6$
3. $\int_0^1 K(x, y)(1-r \cdot y)dy = -x^2(1-x)[(1-r/4) - (r/4)x]/6 \quad \forall r \in \mathbb{R}$
4. $K'(x, y) \leq 0$ per $x \leq 1/2$
5. $K'(1, y) = y(1-y) \geq 0$.
6. $\int_0^1 K'(1/2, y)dy = -1/24$
7. $\int_0^1 K'(1, y)(1-r \cdot y)dy = 1/6 - r/12 \quad \forall r \in \mathbb{R}$
8. $\int_0^1 K'_+(x, y)dy \leq 1/6$
9. $\int_0^1 K''_+(x, y)dy = x^2 - x^3/3$
10. $\int_0^1 K''_+(x, y)(1-r \cdot y)dy \leq 2/3(1-5r/8) \cdot x$ per $0 \leq r \leq 4/7$.
11. $\int_0^1 K''_-(x, y)(1-r \cdot y)dy \leq 1/3 - r/12$ per $0 \leq r \leq 1$.

Demostració. Fixem $x, y \in [0, 1]$.

1. Si $x < y$, el resultat és immediat a partir de 30. Si $x > y$

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\frac{x^2(1-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(x-y) + x(1-y)][(x-y) - x(1-y)] \\ &= -\frac{1}{2}[(x-y) + x(1-y)]y(1-x) \leq 0. \end{aligned}$$

2. Aquest és un cas especial de 3.

3. Per la proposició 4.2.1 (amb $h = 1 - rx$). Comprovem:

- $Kh(0) = Kh(1) = 0$,
- $Kh'(x) = (-2x + 3x^2)[(1 - r/4) - (r/4)x]/6 - (-x^2 + x^3)r/24$
Per tant $Kh'(0) = 0$
- Calculem $(Kh)''(x)$ i $(Kh)'''$ per veure $(Kh)''' = h(x)$.

$$\begin{aligned} Kh'' &= (-2 + 6x)[(1 - r/4) - (r/4)x]/6 - (-2x + 3x^2)r/24 - (-2x + 3x^2)r/24 \\ &= (-2 + 6x)[(1 - r/4) - (r/4)x]/6 - 2(-2x + 3x^2)r/24. \end{aligned}$$

$$Kh''' = 1 - rx.$$

4. És immediat de la fórmula que $K'(x, y) \leq 0$ per $x < y$. Per $x > y$,

$$K'(x, y) = -x(1-y)^2 + (x-y) = [2x - 1 - xy]y, \quad (35)$$

que és negatiu si $x \leq \frac{1}{2}$

5. Avaluar $K'(x, y)$ en $x = 1$. La fórmula es valida per $x > y$.

6. Derivar la igualtat al ítem numero 2 i avaluar a $x = 1/2$

7. Calcular la integral usant 5, o bé derivar la igualtat a l'ítem 3 i fer $x = 1$.

8. Per 4, el costat esquerre s'anul·la per $x \leq \frac{1}{2}$, per tant només cal considerar $x > 1/2$. També, per (35), $K'_+(x, y) = 0$ si $y > x$ o $y > \frac{(2x-1)}{x}$. Com $\frac{(2x-1)}{x} \leq x$, es pot ignorar la primera condició: $K'_+(x, y) = (2x - 1 - xy)y$ per $y < \frac{(2x-1)}{x}$ i 0 altrament. Per tant:

$$\begin{aligned} \int_0^1 K'_+(x, y) dy &= \int_0^{\frac{2x-1}{x}} (2x - 1 - xy) y dy \\ &= (2x - 1) \left[\frac{2x-1}{x} \right]^2 \int_0^1 (1-z) z dz \\ &= (2 - \frac{1}{x})^2 (2x - 1) / 6 \leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

9. Per la definició de $K''(x, y)$,

$$K''_+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < y \\ 2y - y^2 & \text{per } x > y \end{cases}$$

Llavors

$$\int_0^1 K''_+(x, y) dy = \int_0^x (2y - y^2) dy = x^2 - x^3/3$$

10. De l'expressió obtinguda per $K''_+(x, y)$ a la prova de 9 (9) es té

$$\int_0^1 K''_+(x, y)(1 - r \cdot y) dy = x[x - (1 + 2r)x^2/3 + rx^3/4].$$

El que s'ha de provar és

$$x[x - (1 + 2r)x^2/3 + rx^3/4] \leq 2/3(1 - 5r/8), \text{ per } 0 \leq r \leq 4/7.$$

Com els dos costats de l'equació son afins a r , és suficient en provar la desigualtat per dos valors. Escollim $r = 0$ i per $r = 4/7$. Per $r = 0$ es redueix a $x - x^2/3 \leq 2/3$, que és immediat, i per $r = 4/7$ es redueix a $x - 5x^2/7 + x^3/7 \leq 3/7$, o $0 \geq x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$, que és també immediat.

11. De la fórmula de $K''(x, y)$,

$$K''_-(x, y) = \begin{cases} (1 - y)^2 & \text{per } x < y \\ 0 & \text{per } x > y \end{cases}$$

Llavors

$$\begin{aligned} \int_0^1 K''_-(x, y)(1 - ry) dy &= \int_0^1 (1 - y)^2(1 - ry) dy \\ &= (1 - r)(1 - x)^3/3 + r(1 - x)^4/4 \leq 1/3 - r/12. \end{aligned}$$

□

4.3 Algunes estimacions

A la següent proposició es recullen algunes estimacions que s'utilitzaran repetidament. En aquesta secció, de la mateixa manera que a l'anterior, x representa un punt general de $[0,1]$. Recordem (28):

$$0.396 \leq \lambda \leq 0.4031; \quad 0.09 \leq \mu \leq 0.16,$$

Proposició 4.3.1. Si f definida com a (22), es té:

$$1. f''(x) > 0.$$

2. $1.192 < -f'(x) < 1 + \lambda + \mu \leq 1.5631$.
3. $0.7491 < f(\lambda^2) < 0.7692$.
4. $0.5611 < [f(\lambda^2)]^2 < 0.5917$.
5. $f(\lambda^2 x) \leq 1 - 0.2308x$.
6. $\lambda^5(1 + \lambda + \mu)f(\lambda^2 x) < 0.016638(1 - 0.2497x)$.
7. $\lambda^5(1 + \lambda + \mu)[f(\lambda^2 x)]^2 < 0.016638(1 - 0.4370x)$.
8. $\lambda^5(1 + \lambda + \mu)[f(\lambda^2 x)]^3 < 0.016638(1 - 0.5776x)$.
9. $[f(\lambda^2 x)]^2 \geq 1 - 0.5082x$.
10. $-f'(x) < 1.4165$ per $x \geq 0.5$.
11. $f''(\lambda^2 x) < 0.328$.

Demostració. Sigui $x \in [0, 1]$.

1. Utilitzant la proposició 4.2.2, apartat 11,

$$f''(x) = 2\mu + (Kh)''(x) \geq 2\mu - 0.32(1/3 - 0.36/12) > 0.$$

2. Per 1 i per la proposició 4.2.2, apartat 7,

$$1 + \lambda + \mu = -if'(0) \geq -f'(x) \geq -f'(1) = 1 + \lambda - \mu - 0.32(1/6 - 0.36/12) > 1.192.$$

- 3.

$$f(\lambda^2) = 1 - (1 + \lambda + \mu)\lambda^2 + \mu\lambda^4 + Kh(\lambda^2).$$

Degut a que, per la proposició 4.2.2, apartat 1, $Kh(\lambda^2) \leq 0$, $f(\lambda^2) \leq 1 - (1 + \lambda)\lambda^2 - \mu\lambda^2(1 - \lambda^2)$. L'expressió de la dreta es decreixent en μ i λ per separat, per tant s'aconsegueix una fita superior amb $\lambda = 0.396$ i $\mu = 0.09$, que proporciona

$$f(\lambda^2) < 0.7692.$$

Per aconseguir una fita inferior, s'aplica la proposició 4.2.2, apartat 3, per estimar

$$-Kh(\lambda^2) \leq 1/6\lambda^2(1 - \lambda^2)(0.91 - 0.09\lambda^2) \cdot 0.32. \quad (36)$$

Anomenem $M(\lambda)$ a la part dreta de (36). Si veiem que $M(\lambda)$ és creixent, podrem establir una fita per $-Kh(\lambda^2)$. En efecte, aplicant logaritmes es té

$$\ln(M(\lambda)) = \ln\left(\frac{0.32}{6}\right) + 2\ln(\lambda) + \ln(1 - \lambda^2) + \ln(0.91 - 0.09\lambda^2).$$

Si derivem,

$$\ln(M(\lambda))' = \frac{2}{\lambda} - \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 0.09\lambda}{0.91 - 0.09\lambda^2}.$$

Utilitzant que $\lambda \in [0.396, 0.4031]$,

$$\ln(M(\lambda))' > \frac{2}{0.4031} - \frac{2 \cdot 0.4031}{1 - 0.4031^2} - \frac{2 \cdot 0.09}{0.91 - 0.09 \cdot 0.4031^2} > 4.96 - 0.991 - 0.081 > 0,$$

per tant, $M(\lambda)$ és creixent. Així, prenent $\lambda = 0.4031$ podem establir una fita superior de $-Kh(\lambda^2)$ i obtenim $-Kh(\lambda^2) < 0.00106$.

Llavors,

$$f(\lambda^2) \geq 1 - (1 + \lambda)\lambda^2 - \mu\lambda^2(1 - \lambda^2) - 0.00106 > 0.7491.$$

4. Aquest apartat es dedueix de l'anterior elevat al quadrat.

5. Com que f és convexa,

$$f(\lambda^2 x) \leq (1 - x)f(0) + xf(\lambda^2) = 1 - (1 - f(\lambda^2))x,$$

i, per 3, $1 - f(\lambda^2) > 1 - 0.7692 = 0.2308$.

6,7 i 8 Com a 5, $f(\lambda^2 x) \leq 1 - (1 - f(\lambda^2))x$ i

$$1 - f(\lambda^2) = (1 + \lambda)\lambda^2 + \mu\lambda^2(1 - \lambda^2) - Kh(\lambda^2) \geq (1 + \lambda)\lambda^2 + \mu\lambda^2(1 - \lambda^2).$$

Si es defineix

$$q(\lambda, \mu) = q \equiv (1 + \lambda)\lambda^2 + \mu\lambda^2(1 - \lambda^2),$$

el que s'ha provat es que $f(\lambda^2 x) \leq 1 - qx$.

Es vol veure que, per $j = 1, 2, 3$, la funció

$$\lambda^5(1 + \lambda + \mu)(1 - qx)^j \tag{37}$$

és decreixent en λ per una μ fixada, i és decreixent en μ per una λ fixada. Per veure que (37) és decreixent en λ , el que veiem és que el logaritme de l'expressió en (37) és creixent. Per això, derivant, el que s'ha de veure és que

$$\frac{5}{\lambda} + \frac{1}{1 + \lambda + \mu} \geq \frac{jx}{1 - qx} \frac{\partial q}{\partial \lambda}$$

com que l'expressió a la dreta augmenta en j i en x (i l'expressió a l'esquerra no depèn d'aquestes quantitats), és suficient en considerar $j = 3$ i $x = 1$, és a dir, s'ha de veure que

$$\frac{5}{\lambda} + \frac{1}{1 + \lambda + \mu} \geq \frac{3}{1 - q} \frac{\partial q}{\partial \lambda}. \tag{38}$$

Ja que per a tot $\lambda \in [0.396, 0.4031]$ es té

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda} = 2\lambda + 3\lambda^2 + 2\mu\lambda - 4\mu\lambda^3 < 2\lambda + 3\lambda^3 + 2\mu\lambda < 1.5,$$

i $q < 0.2498$, per tant, $1 - q > 0.75$. Així

$$\frac{3}{1-q} \frac{\partial q}{\partial \lambda} < \frac{3}{0.75} 1.5 = 6$$

Com

$$\frac{5}{\lambda} > 10$$

S'estableix (38)

De la mateixa forma, demostrant que (37) és creixent en μ es redueix a mostrar que

$$\frac{1}{1+\lambda+\mu} \geq \frac{3}{1-q} \frac{\partial q}{\partial \mu}. \quad (39)$$

Com

$$\frac{\partial q}{\partial \mu} = \lambda^2(1-\lambda^2) < 0.1361, \quad \frac{3}{1-q} \frac{\partial q}{\partial \mu} \leq 0.55,$$

També es té que

$$\frac{1}{1+\lambda+\mu} > \frac{1}{1.6} = 0.625,$$

que demostra (39)

Per tant, es té una fita superior per $\lambda^5(1+\lambda+\mu)(1-q)^j$ evaluant $\lambda = 0.4031, \mu = 0.16$. El corresponent valor de q és major que 0.2497 i de $\lambda^5(1+\lambda+\mu)$ és menor que 0.016638. Finalment

$$(1 - 0.2497x)^2 \leq 1 - q_2x \implies q_2 = 1 - (1 - 0.2497)^2 > 0.4370$$

$$(1 - 0.2497x)^2 \leq 1 - q_3x \implies q_3 = 1 - (1 - 0.2497)^2 > 0.4376$$

9

$$\frac{d^2}{dx^2} [f(\lambda^2x)]^2 = 2\lambda^4 \left\{ [f'(\lambda^2x)]^2 + f(\lambda^2x) f''(\lambda^2x) \right\} > 0$$

Llavors,

$$\begin{aligned} [f(\lambda^2x)]^2 &\geq [f(0)]^2 + x \frac{d}{dx} [f(\lambda^2x)]^2|_{x=0} \\ &= 1 - 2\lambda^2(1+\lambda+\mu)x \geq 1 - 0.5082 \end{aligned}$$

10 Per 1 i per la proposició 4.2.2 apartat 6 es té

$$-f'(x) \leq f'(0.5) = 1 + \lambda - (Kh)'(0.5) \leq 1.4031 + 0.32/24 < 1.4165$$

11 Per la proposició 4.2.2 apartat 9 es té

$$f''(\lambda^2x) = 2\mu + (Kh)''(\lambda^2x) \leq 2\mu + \lambda^4(1 - \frac{\lambda^2}{3}) \cdot 0.32 < 0.328$$

□

4.4 Demostració del lema 4.1.2

L'objectiu d'aquesta secció és provar el lema 4.1.2. El primer pas és reduir el parell d'equacions

$$\bar{\lambda}(\lambda^*, \mu^*, h) = \lambda^*, \quad \bar{\mu}(\lambda^*, \mu^*, h) = \mu^* \quad (40)$$

a una única equació resolent per μ en termes de λ . Per fer això, notem que

$$\begin{aligned} (Tf)'(0) &= \left(-\frac{1}{\lambda} f \left([f(\lambda^2 x)]^2 \right) \right)'(0) \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda} f' \left([f(\lambda^2 x)]^2 \right) \cdot 2f(\lambda^2 x) \cdot f'(\lambda^2 x) \lambda^2 \right)(0) \\ &= -2\lambda f'(0) f'(1) \end{aligned}$$

perquè, recordem que $f(0) = 1$. Llavors

$$(Tf)'(0) = f'(0) \iff f'(1) = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Recordem que $f'(0) = -(1 + \lambda + \mu)$, llavors

$$(Tf)'(0) = -(1 + \lambda + \mu).$$

Per tant, si $\bar{\lambda} = \lambda$, es té $\bar{\mu} = \mu$, si i només si $f'(1) = -\frac{1}{2\lambda}$, és a dir, si i només si

$$\mu = 1 + \lambda - \frac{1}{2\lambda} - (Kh)'(1), \quad (41)$$

per (22).

Per tant, per resoldre (40), posem (41) a $\bar{\lambda}$ i es resol l'equació $\bar{\lambda} = \lambda$. La solució és λ^* i

$$\mu^* = 1 + \lambda^* - \frac{1}{2\lambda^*} - (Kh)'(1).$$

Per γ un numero real, sigui C_γ la intersecció de la corba $\mu = 1 + \lambda - \frac{1}{2\lambda} - \gamma$ amb el rectangle $\{(\lambda, \mu) : 0.396 \leq \lambda \leq 0.4032, 0.09 \leq \mu \leq 0.16\}$. El que volem veure és que, per $\gamma = (Kh)'(1)$, $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) - \lambda$ s'anul·la exactament un cop a C_γ . Es parteix la demostració d'aquest fet en una seqüència de lemes.

Lema 4.4.1.

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, h) > 1; \quad \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu}(\lambda, \mu, h) > 0$$

Com $1 + \lambda - \frac{1}{2\lambda} - \gamma$ és creixent en λ , això prova que $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) - \lambda$ és creixent en λ al llarg de C_γ , i llavors s'anul·la com a màxim un cop al llarg d'aquest arc.

Lema 4.4.2.

$$0 \leq (Kh)'(1) \leq 0.0438.$$

Lema 4.4.3. Si $0 \leq \gamma \leq 0.0438$, C_γ interseca la frontera del rectangle $\{(\lambda, \mu) : 0.396 \leq \lambda \leq 0.4032, 0.09 \leq \mu \leq 0.16\}$ dos cops, un cop (a prop del vèrtex de baix a l'esquerra) al punt satisfent o bé $\lambda = 0.396, \mu < 0.1334$ o bé $\lambda < 0.3962, \mu = 0.09$, i un segon cop (a prop del vèrtex de dalt a la dreta) a un punt que satisfà o bé $\lambda = 0.4031, \mu > 0.1189$ o bé $\lambda > 0.4024, \mu = 0.16$

Lema 4.4.4.

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(0.396, 0.1334, h) &< 0.396, \\ \bar{\lambda}(0.3962, 0.09, h) &< 0.3962, \\ \bar{\lambda}(0.4031, 0.1189, h) &> 0.4031, \\ \bar{\lambda}(0.4024, 0.16, h) &> 0.4024.\end{aligned}$$

El lema 4.1.2 segueix immediatament d'aquest 4 lemes perquè pels lemes 4.4.1 i 4.4.4 es veu que $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) < \lambda$ si o bé $\lambda = 0.396, \mu \leq 0.1334$ o bé $\lambda \leq 0.3862, \mu = 0.09$ i que $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) > \lambda$ si o bé $\lambda = 0.4031, \mu > 0.1189$ o bé $\lambda > 0.4024, \mu = 0.16$. Llavors, pels lemes 4.4.2 i 4.4.3, $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) - \lambda$ canvia de signe al llarg de $C_{(Kh)'}(1)$ i per tant s'anul·la en algun punt d'aquest arc. Pel lema 4.4.1 no es pot anul·lar més d'un cop. A més, com les desigualtats del lema 4.4.1 són estrictes, pel teorema de la funció implícita la única solució λ^*, μ^* de $\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) = \lambda$ a $C_{(Kh)'}(1)$ varia contínuament amb h

Demostració. del lema 4.4.1

Tenim

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} f \left([f(\lambda^2)]^2 \right) \quad (42)$$

per tant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{\lambda^2} f \left([f(\lambda^2)]^2 \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \left([f(\lambda^2)]^2 \right) \\ &\quad + \frac{2}{\lambda} f' \left([f(\lambda^2)]^2 \right) f(\lambda^2) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda^2) + 2\lambda f'(\lambda^2) \right\}\end{aligned}$$

Com teníem

$$f(x) = 1 - (1 + \lambda)x - \mu x(1 - x) + Kh(x) \implies \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = -x, \quad (43)$$

així tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \lambda} &= -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} - \frac{\lambda [f(\lambda^2)]^2}{\lambda} + 4f' \left([f(\lambda^2)]^2 \right) f'(\lambda^2) f(\lambda^2) \\ &\quad + 2\lambda \left(-f' \left([f(\lambda^2)]^2 \right) \right) f(\lambda^2).\end{aligned} \quad (44)$$

Primer prenem l'estimació, per (42),

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} f(a) = \frac{1}{\lambda^2} [1 - (1 + \lambda)a - \mu a(1 - a) + Kh(a)],$$

on s'escriu a en comptes de $[f(\lambda^2)]^2$. Com $Kh(a) \leq 0$ (per la proposició 4.2.2 apartat 1),

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda^2} [1 - (1 + \lambda)a - \mu a(1 - a)].$$

L'expressió de la dreta és decreixent en λ i μ (per una a fixada). També es té que és decreixent en a (per la proposició 4.3.1, apartat 4). Així, podem donar una fita superior de λ de 0.396, de μ de 0.09, i de a de 0.5611. Això dona

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} < 1.25.$$

També, per la proposició 4.3.1, apartat 4,

$$\frac{[f(\lambda^2)]^2}{\lambda} < \frac{0.5917}{0.396} < 1.5.$$

Per estimar el tercer terme de (44), s'utilitza

$$-f'(\lambda^2) \geq -f'(0.5) = 1 + \lambda - (Kh)'(0.5) \geq 1 + \lambda \geq 1.396$$

(per la proposició 4.3.1 apartat 1 i per la proposició 4.2.2 apartat 4), $f(a) > 1.92$ (per la proposició 4.3.1 apartat 2), $f(\lambda^2) > 0.7491$ (per la proposició 4.3.1 apartat 4). Llavors

$$4f(\lambda^2)f'(a)f'(\lambda^2) > 4.98.$$

Com, finalment, l'últim terme de (44) es no negatiu,

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} \geq -1.25 - 1.5 + 4.98 = 2.23.$$

Ara es considera

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mu}(a) + \frac{2}{\lambda} f'(a)f(\lambda^2) \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda^2).$$

De (43) es té

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -x(1 - x),$$

llavors,

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} = \frac{1}{\lambda} [2f(\lambda^2)(-f'(a))\lambda^2(1 - \lambda^2) - a(1 - a)]$$

Ara $-f'(a) = 1 + \lambda - \mu(2a - 1) - (Kh)'(a)$. Per la proposició 4.2.2 apartat 8, $(Kh)'(a) \leq \frac{0.32}{6} < 0.0534$ i llavors, usant la proposició 4.3.1 apartat 4,

$$-f'(a) > 1 + 0.396 - 0.16(2 \cdot 0.5917 - 1) - 0.0534 > 1.313.$$

Llavors,

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} > \frac{1}{\lambda} [2 \cdot 0.7491 \cdot 1.313 \cdot \lambda^2(1 - \lambda^2) - \frac{1}{4}] > \frac{1}{\lambda} [0.26 - 0.25] > 0$$

□

Demostració del lema 4.4.2. Per la proposició 4.2.2 apartat 5 i apartat 7,

$$0 < (Kh)'(1) < 0.32(1 - 0.36/2)/6 < 0.0438.$$

□

Demostració del lema 4.4.3. Si $0 \leq \gamma \leq 0.0438$, el gràfic de $\mu = 1 + \lambda - \frac{1}{2\lambda} - \gamma$ ⁶ creua la línia $\lambda = 0.396$ a

$$\mu = 1 + 0.396 - \frac{1}{2 \cdot 0.396} - \gamma < 0.1334$$

i la línia horitzontal $\mu = 0.09$ amb un valor $\lambda < 0.3962$ (ja que $1 + 0.3962 - 1/(2 \cdot 0.3962) - \gamma > 0.09$). Un d'aquests creuaments pertany a la frontera del rectangle $(\lambda, \mu) : 0.396 \leq \lambda \leq 0.4031, 0.09 \leq \mu \leq 0.16$.

De manera similar, el gràfic creua la línia vertical $\lambda = 0.4031$ per un valor de $\mu > 0.1189$ i la línia horitzontal $\mu = 0.16$ al valor $\lambda > 0.4024$, i, un altre cop, un d'aquests creuaments pertany a la frontera del rectangle.

□

Demostració del lema 4.4.4. En aquesta demostració s'utilitza f_0 i f_1 descrites a (20), i també s'escriu a en comptes de $[f(\lambda^2)]^2$, com ja s'ha fet anteriorment, i s'escriu a_0 per $[f_0(\lambda^2)]^2$. Amb aquesta notació

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} f(a) = \frac{1}{\lambda} f_0(a) + \frac{1}{\lambda} f_1(a) = \frac{1}{\lambda} f_0(a_0) + \frac{1}{\lambda} f'_0(\tilde{a})(a - a_0) + \frac{1}{\lambda} f_1(a) \quad (45)$$

per algun \tilde{a} entre a_0 i a (pel teorema del valor mig). Per la proposició 4.3.1 apartat 1 es té que $f_1(a) \leq 0$, mentre que

$$a - a_0 = [f_0(\lambda^2) + f_1(\lambda^2)]^2 - [f_0(\lambda^2)]^2 = f_1(\lambda^2) [f(\lambda^2) + f_0(\lambda^2)] \leq 0$$

i $f'_0(\tilde{a}) < 0$, per tant, reescrivint (45) com

$$\bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) = \bar{\lambda}(\lambda, \mu, 0) + \frac{1}{\lambda} f_1(a) + \frac{1}{\lambda} f'_0(\tilde{a})(a - a_0) \quad (46)$$

es veu que el segon terme de la dreta és negatiu i el tercer terme és positiu, per tant es procedeix a fitar cada un dels termes.

Per la proposició 4.2.2 apartat 3,

$$-\frac{f_1(a)}{\lambda} \leq \frac{a^2(1-a)(0.91-0.09a)}{6\lambda} \cdot 0.32. \quad (47)$$

Per la proposició 4.3.1 apartat 4, $0.5611 < a < 0.5917$, per tant el costat dret de (47) és creixent en a en aquest interval. Per tant, si prenem $a = 0.5917$ i $\lambda = 0.396$ a (47), s'aconsegueix la fita superior

⁶En aquest apartat, l'article de Lanford conté un error de signe, ja que ho escriu així $\mu = 1 + \lambda + \frac{1}{2\lambda} - \gamma$, en comptes d'utilitzar un signe $-$ com es presenta a dalt. Tot i així, és un simple error de transcripció, perquè els resultats són correctes

$$-\frac{f_1(a)}{\lambda} < 0.01651.$$

Per estimar el tercer terme de la dreta de (46) primer cal remarcar que, per la proposició 4.3.1 apartat 4, tant a com a_0 estan entre 0.5611 i 0.5917, per tant això també es compleix per \tilde{a} . Llavors, per la proposició 4.3.1 apartat 10, $-f'_0(\tilde{a}) < 1.4165$. També es té, per l'apartat 3 de la mateixa proposició, que $f_0(\lambda^2)$ i $f(\lambda^2)$ són menors a 0.762, per tant, $[f(\lambda^2) + f_0(\lambda^2)] < 2 \cdot 0.7692$. Finalment, per la proposició 4.2.2 apartat 3,

$$-f_1(\lambda^2) \leq \frac{\lambda^4(1 - \lambda^2)}{6} [0.91 - 0.09\lambda^2] \cdot 0.32.$$

Combinant aquestes estimacions, tenim

$$\frac{f'_0(\tilde{a})(a - a_0)}{\lambda} < 0.00572.$$

Amb això s'estableix que

$$\bar{\lambda}(\lambda, \mu, 0) - 0.1651 < \bar{\lambda}(\lambda, \mu, h) < \bar{\lambda}(\lambda, \mu, 0) + 0.00572.$$

Llavors, per provar, per exemple $\bar{\lambda}(0.4031, 0.1189, h) > 0.4031$ és suficient amb provar $\bar{\lambda}(0.4031, 0.1189, 0) - 0.01651 > 0.4031$, i de la mateixa manera pels altres tres enuncisats del lema 4.4.4. Les estimacions requerides amb $h = 0$ han sigut establides computacionalment a [12]. \square

4.5 Demostració del lema 4.1.3

L'objectiu d'aquesta secció és provar el lema 4.1.3. Per tant, podem assumir que λ i μ són les λ^* i μ^* del lema 4.1.2. Per la majoria de l'argument no es necessita utilitzar aquest fet, només cal suposar (28) i (29) sobre λ, μ i h , i per això, en aquest casos, no s'utilitzara el símbol $*$. Arribats a cert punt, però, serà convenient utilitzar la identitat

$$f'(1) = -\frac{1}{2\lambda}, \quad (48)$$

que s'ha mostrat a la secció 4.4, com a conseqüència de $\lambda = \lambda^*, \mu = \mu^*$.

Per aquesta secció, s'introdueix la notació

$$a(x) \equiv [f(\lambda^2 x)]^2; \quad (49)$$

noteu que no es tracta d'una constant com s'ha utilitzat anteriorment a la secció 4.4. També s'escriurà \bar{f} per Tf .

Si es deriva \bar{f} es té

$$\begin{aligned}\bar{h}(x) = \bar{f}'''(x) = & 8\lambda^5[f(\lambda^2x)]^3[-f'(\lambda^2x)]^3h(a(x)) \\ & + 2\lambda^5f(\lambda^2x)[-f'(a(x))]h(\lambda^2x) \\ & + 12\lambda^5f(\lambda^2x)[-f'(\lambda^2x)]^3f''(a(x)) \\ & + 12\lambda^5[f(\lambda^2x)]^2[-f'(\lambda^2x)]f''(\lambda^2x)f''(a(x)) \\ & - 6\lambda^5[-f'(\lambda^2x)][-f'(a(x))]f''(\lambda^2x).\end{aligned}\quad (50)$$

Com que $f(\lambda^2y)$, $-f'(y)$ i $f''(y)$ son no negatius a $[0, 1]$ per la proposició 4.3.1, tots els termes en l'expressió (50) son positius excepte l'ultim. Es demostrarà que $\bar{h}(x) \geq 0$ provant que la suma del tercer i l'ultim terme de l'expressió ja es positiu. Per fer-ho, noteu que com $f''' \geq 0$ (per hipòtesi), $f''(a(x)) \geq f''(\lambda^2)$, per la proposició 4.3.1 apartat 9 i (28) perquè

$$f''(a(x)) \geq f''(\lambda^2x) \iff a(x) \geq \lambda^2x \iff 1 - 0.5082x \geq 0.17x \quad \forall x \in [0, 1], \quad (51)$$

i també, com $f'' \geq 0$ per la proposició 4.3.1 apartat 1, $-f'(\lambda^2x) \geq -f'(a(x))$, perquè es tracta de la desigualtat de (51) multiplicada per -1 . Llavors

$$\begin{aligned}12\lambda^5f(\lambda^2x)[-f'(\lambda^2x)]^3f''(a(x)) - 6\lambda^5[-f'(\lambda^2x)][-f'(a(x))]f''(\lambda^2x) \\ \geq 6\lambda^5[-f'(\lambda^2x)]^2f''(a(x))\{2[-f'(\lambda^2x)]f(\lambda^2x) - 1\}.\end{aligned}$$

Utilitzant un altre cop que $f'' \geq 0$, es té que $-f'(\lambda^2x) \geq -f'(0.5) \geq 1 + \lambda$ (per la proposició 4.2.2 apartat 4, la contribució de h a $-f'(0.5)$ es positiva). També, per la proposició 4.3.1 apartat 3, $f(\lambda^2x) \geq f(\lambda^2) > 0.7491$. Llavors,

$$2[-f'(\lambda^2x)]f(\lambda^2x) - 1 > 2 \cdot 1.396 \cdot 0.7491 - 1 > 0.$$

Amb això ja es té que $\bar{h} \geq 0$.

Per tant, prenent (50) i utilitzant

$$f''(a(x)) = 2\mu + (Kh)''(a(x))$$

en el tercer i quart termes de la dreta i

$$f''(\lambda^2x) = 2\mu + (Kh)''(\lambda^2x)$$

en el cinquè terme. Expandint i reagrupant, es té

$$\begin{aligned}\bar{h}(x) = & 8\lambda^5[f(\lambda^2x)]^3[-f'(\lambda^2x)]^3h(a(x)) \\ & + 2\lambda^5f(\lambda^2x)[-f'(a(x))]h(\lambda^2x) \\ & + 12\mu\lambda^5\{2f(\lambda^2x) - [-f'(\lambda^2x)]^3 - [-f'(\lambda^2x)][-f'(a(x))]\} \\ & + 24\mu\lambda^5f''(\lambda^2x)[-f'(\lambda^2x)][f(\lambda^2x)]^2 \\ & + 12\lambda^5f(\lambda^2x)[-f'(\lambda^2x)]\{[-f'(\lambda^2x)]^2 + f(\lambda^2x)f''(\lambda^2x)\}(Kh)''(a(x)) \\ & - 6\lambda^5[-f'(\lambda^2x)][-f'(a(x))](Kh)''(\lambda^2x).\end{aligned}\quad (52)$$

Anomenem a aquests sis termes a de la dreta com T_1, \dots, T_6 respectivament. Per tal de fitar \bar{h} , es procedeix a fitar cada un dels $T_i, i \in 1 : 6$

1.

$$T_1 = 8\lambda^5 [f(\lambda^2 x)]^3 [-f'(\lambda^2 x)]^3 h(a(x))$$

Utilitzem que $-f(\lambda^2 x) \leq 1 + \lambda + \mu$, per la proposició 4.3.1 apartat 2. També es té, per l'apartat 8 de la mateixa proposició, que $\lambda^5(1 + \lambda + \mu) [f(\lambda^2 x)]^3 < 0.016638(1 - 0.5776x)$. Així mateix, per l'apartat 9 de la mateixa proposició, es té que $a(x) \geq 1 - 0.5082x$. Combinant aquestes desigualtats amb l'obtinguda del lema 4.1.2:

$$h(x) \leq 0.32(1 - 0.36x),$$

es té

$$h(a(x)) \leq 0.32 \cdot 0.64 \cdot \left(1 + \frac{0.36 \cdot 0.5082}{0.64} x\right).$$

Per tant,

$$T_1 < 0.066608 \cdot (1 - 0.5776x) \cdot (1 + 0.2859x) \leq 0.066608(1 - 0.2917x).$$

2.

$$T_2 = 2\lambda^5 f(\lambda^2 x) [-f'(a(x))] h(\lambda^2 x)$$

Per la proposició 4.3.1 apartat 10 es té que $-f'(a(x)) < 1.4165$. Per l'apartat 5 de la mateixa proposició es té que $f(\lambda^2 x) \leq 1 - 0.2308x$. Així mateix, pel Lemma 4.1.2 i per (28) es té

$$h(\lambda^2 x) \leq 0.32(1 - 0.36\lambda^2 x) = 0.32(1 - 0.36 \cdot 0.4031^2 x) = 0.32(1 - 0.0564x)$$

Llavors, considerem el producte

$$(1 - 0.2308x)x(1 - 0.0564x) \leq (1 - cx)$$

on

$$c = 1 - (1 - 0.2308)(1 - 0.0564) > 0.2741.$$

Llavors,

$$T_2 < 0.00965(1 - 0.2741x).$$

3.

$$T_3 = 12\mu\lambda^5 \{2f(\lambda^2 x) - [-f'(\lambda^2 x)]^3 - [-f'(\lambda^2 x)] [-f'(a(x))]\}$$

Amb la proposició 4.3.1 apartat 1 i amb (48) es té:

$$-f'(a(x)) \geq -f'(1) = \frac{1}{2\lambda}$$

Si s'utilitza que $-f'(\lambda^2 x) \leq 1 + \lambda + \mu$ (per l'apartat 2 de la proposició anterior) i que $f(\lambda^2 x) \leq 1 - 0.2308x$ (per l'apartat 5 de la mateixa proposició), es té que

$$T_3 \leq 12\mu\lambda^4(1 + \lambda + \mu) \left\{ 2\lambda(1 + \lambda + \mu)^2(1 - 0.2308x) - \frac{1}{2} \right\}.$$

La part de la dreta de l'equació es creixent en λ i en μ , així que es pot aconseguir una fita superior substituint per $\lambda = 0.4031$ i per $\mu = 0.16$ (per (28)). Això ens dona

$$T_3 < 0.11653 - 0.03602x.$$

4.

$$T_4 = 24\mu\lambda^5 f''(\lambda^2 x) [-f'(\lambda^2 x)] [f(\lambda^2 x)]^2$$

S'utilitza que $f''(\lambda^2 x) < 0.328$ per la proposició 4.3.1 apartat 11. També es té que $-f'(\lambda^2 x) \leq 1 + \lambda + \mu$ per l'apartat 2 de la mateixa proposició. Així mateix, per l'apartat 7, es té

$$\lambda^5(1 + \lambda + \mu) [f(\lambda^2 x)]^2 < 0.016638(1 - 0.4370x)$$

Llavors,

$$T_4 < 0.02096(1 - 0.4307x).$$

5.

$$T_5 = 12\lambda^5 f(\lambda^2 x) [-f'(\lambda^2 x)] \{ [-f'(\lambda^2 x)]^2 + f(\lambda^2 x) f''(\lambda^2 x) \} (Kh)''(a(x))$$

Per la proposició 4.2.2 apartat 10, i per la definició (49) de $a(x)$,

$$(Kh)''(a(x)) \leq 0.32 \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5}{8} \cdot 0.36 \right) [-f(\lambda^2 x)]^2.$$

Per la proposició 4.3.1 apartat 2 es té que $-f'(\lambda^2 x) \leq 1 + \lambda + \mu$. També, per la mateixa proposició, apartat 8, es té que

$$\lambda^5(1 + \lambda + \mu) [f(\lambda^2 x)]^3 < 0.016638(1 - 0.5776x).$$

Llavors, prenent $f(\lambda^2 x) \leq 1$, per l'apartat 4 de la proposició 4.3.1, i amb $f''(\lambda^2 x) < 0.328$ per la mateixa proposició apartat 11, es té

$$T_5 < 0.09149(1 - 0.5776x).$$

6.

$$T_6 = -6\lambda^5 [-f'(\lambda^2 x)] [-f'(a(x))] (Kh)''(\lambda^2 x)$$

S'utilitza que

$$-(Kh)'' \leq 0.32 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{0.36}{12} \right)$$

per la proposició 4.2.2 apartat 11. També es té

$$-f'(a(x)) < 1.4165$$

per la proposició 4.3.1 apartat 10. Així mateix, per l'apartat 2 de la mateixa proposició es té que $-f'(\lambda^2 x) \leq 1 + \lambda + \mu$. Per tant, utilitzant la fita de λ de (28) es té

$$T_6 \leq 6 \cdot 0.4031^5 \cdot (1 + 0.4031 + 0.16) \cdot 1.4165 \cdot 0.32 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{0.36}{12} \right) < 0.01373.$$

Així doncs, amb totes les estimacions anteriors, es té

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &< 0.06661(1 - 0.2917x) + 0.00965(1 - 0.2714x) + 0.11653 - 0.03602x \\ &\quad + 0.02096(1 - 0.4370x) + 0.09149(1 - 0.5776x) + 0.01373 \\ &< 0.319 - 0.12x \\ &< 0.32(1 - 0.36x). \end{aligned}$$

4.6 Demostració del lema 4.1.3

En aquesta secció s'utilitza la notació de la secció anterior (recordem $a(x) \equiv [f(\lambda^2 x)]^2$), però també s'assumeix, a més, que h és analítica en un veïnat complex de $[0, 1]$.

Per $c \in [0, 1]$ es té

$$\left| \frac{d}{dx} a(x) \right| = |2\lambda^2 f(\lambda^2 x) f'(\lambda^2 x)| \leq 2\lambda^2(1 + \lambda + \mu) < 0.508.$$

Assumim que h es analítica a D_δ i satisfà

$$|h(x)| < 0.32(1 - 0.36|x|) \quad (53)$$

al domini D_δ . Llavors, donat δ suficientment petit, $a(x)$ (que es analític a $D_{\frac{\delta}{\lambda^2}}$) satisfà

$$\left| \frac{d}{dx} a(x) \right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta} \subset D_{\frac{\delta}{\lambda^2}} \quad (54)$$

per tant, per $y \in [0, 1]$,

$$|a(x) - a(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y| < \delta$$

i llavors $a(x)$ envia $D_{\frac{3}{2}\delta}$ a D_δ . Per tant

$$\bar{f} = \frac{1}{\lambda} f(a(x))$$

és analítica a $D_{\frac{3}{2}\delta}$. A partir d'ara s'assumeix que δ és suficientment petita i llavors (54) deriva de (53). Es vol demostrar que fent δ més petit es pot garantir que

$$|\bar{h}(x)| < 0.32(1 - 0.36|x|) \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta}. \quad (55)$$

El càlcul (50) és valid tant per x reals com per x complexes. Les estimacions de (52) mostren que la suma dels últims tres termes de la dreta de (50) (o, el que és el mateix $T_3 + T_4 + T_5 + T_6$ en la notació de (52) esta acotada per $0.24272 - 0.09802x$ per $x \in [0, 1]$. Aquests quatre termes inclouen f i les seves dues derivades, i h , que esta fitat per (53), per tant es pot garantir, prenent δ petit, que

$$|T_3 + T_4 + T_5 + T_6| < 0.24273 - 0.09802x \quad \text{per} \quad x \in D_{\frac{3}{2}\delta}$$

Noteu que s'ha afegit un a l'ultim digit del terme constant de la dreta, per garantir que la fita.

Fitar T_1 i T_2 requereix un argument diferent. Per definició,

$$T_1 = 8\lambda^5[f(\lambda^2x)]^3[-f'(\lambda^2x)]^3h(a(x))$$

A la secció 4.5 s'ha estimat

$$8\lambda^5[f(\lambda^2x)]^3[-f'(\lambda^2x)]^3 < 0.32522(1 - 0.5776x) \quad \text{a} \quad [0, 1]$$

Utilitzant (53) en f''' es veu que si δ és suficientment petita

$$|8\lambda^5[f(\lambda^2x)]^3[-f'(\lambda^2x)]^3| < 0.32523(1 - 0.5776|x|) \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta}$$

A més, $a(x) > 1 - 0.5082x$ a $[0, 1]$ per la proposició 4.3.1 apartat 9 i llavors, si δ és suficientment petita $|a(x)| > 0.9999 - 0.5083|x|$ a $D_{\frac{3}{2}\delta}$. Per tant:

$$\begin{aligned} |h(a(x))| &< 0.32(1 - 0.36|a(x)|) \\ &\leq 0.32(1 - 0.36(0.9999 - 0.5083|x|)) \\ &\leq 0.20482 + 0.05856|x| \end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq 0.20482 \cdot 0.32523 + (0.058556 \cdot 0.325323 - 0.187853 \cdot 0.2048115)|x| \\ &\leq 0.066616(1 - 0.2916|x|) \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta} \end{aligned}$$

De la mateixa manera, i aplicant també (53), es té

$$|T_2| < 0.009651(1 - 0.2740|x|) \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta}.$$

Combinant totes les fites anteriors es té

$$|\bar{h}(x)| < 0.319 - 0.12|x| < 0.32(1 - 0.36|x|) \quad \text{a} \quad D_{\frac{3}{2}\delta}.$$

com es volia demostrar.

La continuïtat de l'aplicació $h \rightarrow h^*$ és immediata per la fórmula (50) per \bar{h} i per la dependència continua de λ^* i μ^* en h .

5. El càlcul de la constant

5.1 Mètode directe

Per calcular la constant δ , Feigenbaum va proposar al 1978 [6], al seu primer article sobre la constant, un mètode iteratiu basat en el mètode de Newton. Ell ho va calcular amb funcions del mateix tipus que l'aplicació logística, però no va utilitzar aquesta última. En aquest treball però, es treballa amb l'aplicació logística. El mètode que mostrarem també es troba explicat en més detall a [3].

La tasca de trobar δ és basa en trobar les μ , i després simplement fer el quocient per obtenir δ . Com s'ha dit anteriorment, es treballa amb les μ^s per la seva ràpida convergència. Així doncs, la incògnita de les funcions que s'utilitzaran a partir d'ara és la variable μ , perquè la variable x té valor $x_0 = \frac{1}{2}$ perquè per definició de cicle superestable, el cicle ha de contenir el màxim de la funció, i caldrà calcular $f^{2^n}(x_0, \tilde{\mu})$, amb $\tilde{\mu}$ una aproximació de la μ_n^s , que s'obté amb el mètode de Newton. S'ha de tenir en compte que no cal compondre la funció f , sinó que només cal calcular $x_{2^n+1} = f^{2^n}(x_0, \tilde{\mu})$, que té un cost incomparablement menor. Per tant la funció que de la qual s'han de trobar els zeros amb el mètode de Newton és:

$$f^{2^n}\left(\frac{1}{2}, \mu\right) - \frac{1}{2}$$

Per explicar millor l'algorisme, considerem la seqüència de polinomis:

$$\begin{aligned} p_k(a) &= a \cdot p_{k-1}(a)(1 - p_{k-1}(a)) \\ p_0(a) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Noteu que els polinomis estan definits recursivament aplicant l'aplicació logística, on a fa el paper de μ^s . Per tant, amb aquest esquema, si $j = 2^n$, la funció f_μ té un j - cicle superestable si i només si el polinomi $p_j(a) - \frac{1}{2} = 0$

Amb això, l'esquema de l'algorisme és el següent:

$$a_k^i = a_k^{i-1} + \frac{p_{2^k}(a_k^i)}{p'_{2^k}(a_k^i)} \quad \text{per } i = 1, 2, 3... \quad (56)$$

on $a_k = \mu_k^s$ Utilitzant recursivament la derivada com:

$$p'_j(a) = p_{j-1}(a)(1 - p_j(a)) + a(1 - 2p_j(a))p'_{j-1}(a) \quad \text{per } j = 1 : 2^k$$

El procediment és equivalent a fer:

$$\mu = \mu - \frac{f^{2^n}\left(\frac{1}{2}, \mu\right) - \frac{1}{2}}{\frac{\partial f^{2^n}}{\partial \mu}\left(\frac{1}{2}, \mu\right)}$$

(No s'inclouen els subíndex de les μ 's a causa de les restriccions d'espai, perquè s'hauria d'incloure l'índex de la iteració a la μ_n^s que s'està calculant).

Per realitzar les iteracions s'han de tenir en compte algunes consideracions. Primer, que s'ha de triar bé l'aproximació inicial de $\tilde{\mu}$, perquè sinó no convergeix a la μ_n^s que s'espera. Això és degut al fet que

l'aplicació logística és caòtica i per valors més grans de μ_∞ podem tenir fenòmens inesperats. És per això que la nova $\tilde{\mu}$ s'aproxima inicialment per la fórmula

$$\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_{k-1} + \frac{\tilde{\mu}_{k-1} - \tilde{\mu}_{k-2}}{\tilde{\delta}_{k-1}} \quad \text{per } k = 2, 3, \dots$$

(en aquest cas k denota les iteracions), on $\tilde{\delta}_{k-1}$ és la millor aproximació de δ que s'ha obtingut fins al moment, és a dir

$$\delta_k = \frac{\mu_{k-1} - \mu_{k-2}}{\mu_k - \mu_{k-1}}$$

O de la mateixa manera en l'esquema de polinomis que hem fet:

$$a_k^0 = a_{k-1} + \frac{a_{k-1} - a_{k-2}}{\tilde{\delta}_{k-1}} \quad \text{per } k = 2, 3, \dots$$

Un altre factor important a tenir en compte a l'hora de programar l'algorisme és tenir en compte la necessitat de precisió estesa, ja que la convergència a μ_∞ és geomètrica i les μ s'apropen molt ràpidament. A més, això dificulta el càlcul de δ , perquè es produeixen cancel·lacions ràpidament.

El primer objectiu va ser superar la precisió amb la qual Feigenbaum va fer els càlculs (va calcular δ amb 13 decimals correctes i per aconseguir-ho va haver d'utilitzar una precisió de 29 xifres per les μ)⁷. Els primers intents de càlcul que s'han realitzat en aquest treball van ser en Matlab i en C++, però van resultar relativament infructuosos, a causa de la no utilització de precisió estesa. És per això que es van intentar millorar els resultats utilitzant precisió estesa al Matlab. Els resultats obtinguts són:

```
Aproximació número 3 és 4.708943013540505
Aproximació número 4 és 4.680770998010697
Aproximació número 5 és 4.662959611114100
Aproximació número 6 és 4.668403925918400
Aproximació número 7 és 4.668953740967623
Aproximació número 8 és 4.669157181328844
Aproximació número 9 és 4.669191002485096
Aproximació número 10 és 4.669199470547726
Aproximació número 11 és 4.669201134601043
Aproximació número 12 és 4.669201509513552
Aproximació número 13 és 4.669201587522386
```

Noteu que la numeració dels resultats comença en 3 degut a que el càlcul de δ només és possible amb 3 valors de μ , per tant el primer resultat s'imprimeix quan es troba μ_3^5 . Degut a que el cost computacional de l'algorisme és exponencial, arriba un punt en que no val la pena seguir perquè els resultats triguen massa a millorar. A més Feigenbaum diu al seu article que va aconseguir els seus resultats en "uns pocs minuts".

⁷Feigenbaum va utilitzar un superordinador CDC 6600, que va ser l'ordinador més ràpid del món entre els anys 1964 i 1969, i podia treballar a 40 MHz

Per tant, aquest resultat, tot i ser millor que l'anterior, segueix sense ser satisfactori, perquè encara no es van aconseguir els resultats de Feigenbaum.

El següent intent que es va realitzar va ser utilitzar una llibreria de precisió estesa per C, però va resultar molt complicada d'utilitzar, per tant es va optar per treballar amb PARI/GP. PARI/GP és un sistema d'àlgebra computacional dissenyat per a càlculs ràpids en la teoria de nombres, que permet utilitzar precisió arbitrària. Aquest llenguatge va resultar ser molt més ràpid que Matlab, i es van obtenir els resultats següents:

```

3 4.7025880437737211481259475140350807011 done in 0 ms.
4 4.7169333828736794961033701069257010295 done in 0 ms.
5 4.6334624872278954374770829791798964143 done in 0 ms.
6 4.6684132488614060095246241202456845144 done in 0 ms.
7 4.6689462924053415845641065545101368297 done in 0 ms.
8 4.6691569544828085753176591314108455118 done in 0 ms.
9 4.6691910024850841660760830285836836856 done in 0 ms.
10 4.6691994705477254736275831111789125749 done in 0 ms.
11 4.6692011346010422352056100041666080025 done in 0 ms.
12 4.6692015095135523273461985874926944300 done in 0 ms.
13 4.6692015875223855075747022726758048725 done in 15 ms.
14 4.6692016045121851859714945929339298216 done in 16 ms.
15 4.6692016081159352225771651390433446012 done in 31 ms.
16 4.6692016088920690973749020640047368393 done in 63 ms.
17 4.6692016090577589360884197866090341651 done in 93 ms.
18 4.6692016090933106890796519949932855303 done in 203 ms.
19 4.6692016091009166170318624557074503684 done in 407 ms.
20 4.6692016091025465839804305519075808041 done in 798 ms.
21 4.6692016091028955480847510021077554207 done in 1688 ms.
22 4.6692016091029703009570014747996005991 done in 3234 ms.
23 4.6692016091029863088150040311948878920 done in 6375 ms.
24 4.6692016091029897374207135004007377108 done in 12892 ms.
25 4.6692016091029904723850937841648900958 done in 26031 ms.

```

La durada d'aquest càlcul va ser de menys d'un minut, per tant es van millorar els resultats obtinguts per Feigenbaum tant en temps com en dígits decimals correctes, perquè la millor aproximació de Feigenbaum va ser $\delta = 4.66920160910$. Aquest resultat s'aconsegueix, en el nostre cas, en menys d'un segon, mentre que en menys d'un minut la millor aproximació en aquest càlcul és $\delta \approx 4.669201609102990$.

La millora d'aquests resultats només és possible augmentant la precisió dels càlculs. Per tant, vam passar d'utilitzar 38 xifres significatives a utilitzar-ne 57. Amb això vam aconseguir millorar els resultats en les següents iteracions:

```

3 4.70258804377372114812594751403508070122808697 done in 0 ms.
4 4.71693338287367949610337010692570102953267988 done in 0 ms.
5 4.63346248722789543747708297917989643025149084 done in 0 ms.
6 4.66841324886140600952462412024568443344336145 done in 0 ms.
7 4.66894629240534158456410655451013676103072336 done in 0 ms.
8 4.66915695448280857531765913141084565542709944 done in 0 ms.
9 4.66919100248508416607608302858368609638200488 done in 0 ms.
10 4.66919947054772547362758311117898267065040003 done in 0 ms.
11 4.66920113460104223520561000416642875390571187 done in 0 ms.
12 4.66920150951355232734619858749423704663131323 done in 0 ms.
13 4.66920158752238550757470227263861686224923519 done in 15 ms.
14 4.66920160451218518597149459294099617025921697 done in 16 ms.
15 4.66920160811593522257716513885853698758351491 done in 31 ms.
16 4.66920160889206909737490206806374123621695657 done in 47 ms.
17 4.66920160905775893608841983606926396660116662 done in 109 ms.
18 4.66920160909331068907965159127987235694975835 done in 203 ms.
19 4.66920160910091661703186753510308817990440329 done in 422 ms.
20 4.66920160910254658398034633352797212937120988 done in 814 ms.
21 4.66920160910289554808535257360393632282559288 done in 1641 ms.
22 4.66920160910297030095467548428658256928512109 done in 3297 ms.
23 4.66920160910298630882039863006095225603021592 done in 6658 ms.
24 4.66920160910298973745117233308210663205026827 done in 13140 ms.
25 4.66920160910299047172968950958870097646717722 done in 26219 ms.
26 4.66920160910299062899327275841575669721889456 done in 52579 ms.
27 4.66920160910299066267386995261607385618664483 done in 105156 ms.
28 4.66920160910299066988727767936710719529189872 done in 210375 ms.
29 4.66920160910299067143216189225835595655568904 done in 421203 ms.
30 4.66920160910299067176302962587496336731598237 done in 842345 ms.

```

Amb aquest càlcul es van aconseguir 18 decimals correctes, és a dir, $\delta \approx 4.669201609102990671$ si trunquem, o bé $\delta \approx 4.6692016091029906718$ si arrodonim (guanyem una xifra decimal correcta). L'última iteració va durar 842345 ms, és a dir, aproximadament 14 minuts, per tant, la següent hauria durat gairebé mitja hora., ja que es trivial comprovar a partir dels temps impresos que cada iteració requereix el doble de temps que l'anterior. Això és degut al fet que a cada iteració es realitzen 2^n operacions (vegeu 14).

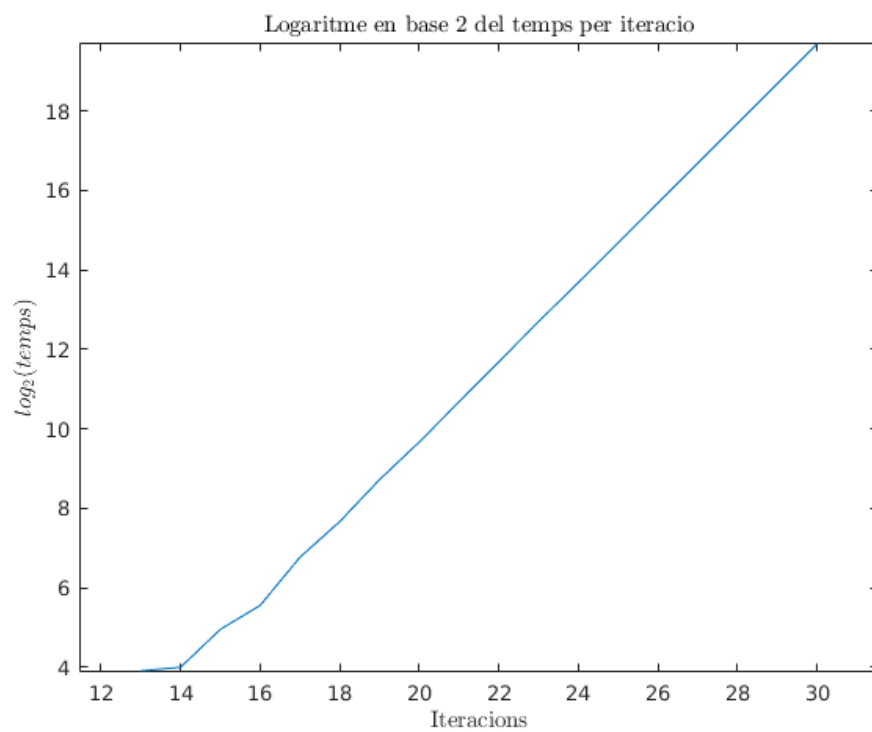


Figura 14: Cost de l'algorisme en escala logaritmica

6. Conclusions i treball futur

6.1 Conclusions

Durant aquest treball s'han presentat un dels primers exemples d'aplicació amb èxit de les tècniques de renormalització. Aquestes tècniques s'han aplicat en aquesta memòria per la deducció de l'equació de punt fix de Feigenbaum-Cvitannović. El punt fix d'aquest operador, així com els valors propis de la linealització de l'operador en el punt fix donen lloc a una definició intrínseca de les constants α i δ . Aquesta deducció, que en un principi es fa de manera heurística, es referma mitjançant dues proposicions que proven que la teoria de renormalització, tal com la va aplicar Feigenbaum, és correcta. Això ha permès comprendre la universalitat de les constants α i δ . Com qualsevol nova teoria, estudiar-la i comprendre-la permetrà el desenvolupament de nous resultats al camp de les matemàtiques i de la ciència en general.

L'equació de punt fix no es resol de manera estàndard ja que l'operador T , deduït mitjançant la teoria de la renormalització, no satisfà les hipòtesis del teorema del punt fix de Banach (tot i estar definit entre espais de Banach). Per solucionar aquest entrebanc, primer s'ha definit un nou sistema de coordenades que ens ha permès demostrar les propietats necessàries sobre l'operador T (en concret, sobre el conjunt imatge) per poder aplicar el teorema de punt fix de Schauder. Aquest teorema ha estat estudiat en profunditat i s'ha inclòs una demostració a l'apèndix. A més a més, ha estat necessari fer ús del teorema de la funció implícita, el teorema d'Arzelà-Ascoli i la fórmula integral de Cauchy.

Així mateix, s'ha implementat amb èxit un algorisme pel càlcul de la constant δ en diversos llenguatges de programació: C++, Matlab i PARI/GP. Dels intents realitzats, el llenguatge PARI/GP ha resultat ser el més eficient amb molta diferència. Amb aquest llenguatge s'han obtingut resultats millors que els presentats per Feigenbaum a [6] o Briggs a [3], tant en temps com en nombre de xifres decimals, aconseguint un total de 18 xifres correctes. De tots els treballs o articles que l'autor ha trobat on s'utilitza aquest mètode, cap tenia resultats tan bons. També es va pensar a utilitzar altres mètodes de càlcul basats en l'expansió en sèrie de potències de la funció universal g , però es van descartar per falta de temps.

6.2 Treball futur

En el futur, aquest treball es podria completar amb l'estudi dels articles que no utilitzen aproximacions numèriques, com [13]. Així mateix, existeixen més algorismes pel càlcul de la constant de Feigenbaum, basats en l'aproximació de la funció g per sèries. Un dels últims és [15], que resol l'equació de punt fix amb una expansió de g amb polinomis de Txévishev, i resulta molt més eficient que una expansió en sèrie de Taylor.

També queda la porta oberta a l'estudi d'altres casos on s'ha aplicat la renormalització, i la teoria que s'ha desenvolupat en aquest camp. Un d'aquests casos pot ser el mapa d'Henon, on també apareix la constant de Feigenbaum.

A més, també existeix la possibilitat d'estudiar l'aparició de la constant de Feigenbaum experimentalment. Molts d'aquests estudis han sigut recopilats en [4].

7. Apèndixs

7.1 Els codis

Els codis utilitzats en aquest treball es poden trobar a GitHub o bé a la direcció web <https://github.com/mi2354/Feigenbaum-Constant>, per poder descarregar-los. A continuació es detallen. L'estructura dels codis és semblant, i l'algorisme que utilitzen és el mateix, però tenen diferències en els formats de sortida.

7.2 C++

Aquest codi, com ja s'ha explicat prèviament, va resultar poc útil perquè la quantitat de bits necessària per fer els càlculs no va ser suficient, però precisament per això va ajudar a comprendre les dificultats del càlcul. Aquest codi, a diferència dels altres, emmagatzemava les δ_i i les μ_i^s que s'anaven obtenint. Aquest codi també realitza més iteracions del mètode de Newton de les necessàries perquè no va ser fins posteriorment que es va veure que no es necessitaven tantes.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>
using namespace std;

typedef long double ld;

void print_vector(vector<ld> v) {
    int n = (int)v.size();
    for (int i = 0; i < n; ++i) cout << v[i] << endl;
}

vector<ld> calculate_deltas(vector<ld> v) {
    int n = (int)v.size();
    vector<ld> delta(n-2);
    for (int i = 0; i < n-2; ++i){
        delta[i] = (v[i+1]-v[i])/(v[i+2]-v[i+1]);
    }
    return delta;
}

int main(){
    cout.precision(16);
    int n_real = 12; // numero d'iteracions
    int n = n_real + 2; //n_real mus obtingudes + 2 aproximacions
        initials
    vector<ld> mu(n+1, 0);
    vector<ld> alpha(n+1, 0);
    mu[1] = 2;
```

```

mu[2] = 1 + sqrt(5);
ld d = 4;
for(int k = 3; k <= n; ++k){ //exponent 2^k
    ld a = mu[k-1] + (mu[k-1] - mu[k-2])/d; // aproximacio
        inicial de mu
    ld res; ld der;
    for(int i = 0; i < 2; ++i) { // # iteracions Newton
        res = 0.5; der = 0;
        int n_compositions = pow(2, k-1) + 1;
        for (int j = 2; j <= n_compositions; ++j) {
            der = res*(1-res) + a*(1-2*res)*der;
            res = a*res*(1-res);
        }
        a = a - (res - 0.5)/der;
    }

    mu[k] = a;
}

vector<ld> real_mu(n_real+1);
for (int i = 0; i <= n_real; ++i) real_mu[i] = mu[i+2];

cout << "mus obtingudes:" << endl << endl;
print_vector(real_mu);

vector<ld> delta((int)real_mu.size() - 2);
delta = calculate_deltas(real_mu);

cout << endl << "deltas obtingudes:" << endl << endl;
print_vector(delta);
}

```

7.3 Matlab

Aquest codi és essencialment com l'anterior, però utilitza la funció `vpa` del Matlab que permet determinar el numero de bits assignats a algunes variables. Aquesta funció va permetre aproximar la constant molt millor, però a costa de perdre molt més temps, ja que el codi va resultar molt lent. Es per això que a l'ultima línia de codi es calcula el temps que triga.

En aquest codi no es guarden els valors de δ_i , però si els de μ_i^s

```

clc;
clear all;

start_time = clock;

```

```

a0 = 2; a1 = 1 + sqrt(5); d = 4;
mu(1) = a0;
mu(2) = a1;
for k = 3:15
    a = a1 + (a1-a0)/d; %aprox inicial
    for i = 1:2
        res = 0.5; der = 0;
        for j = 2:2^(k-1)+1
            der = res*(1-res) + a*(1-2*res)*der;
            res = a*res*(1-res);
        end
        a = a - (res-0.5)/der;
    end
    %d = (a1-a0)/(a-a1); %aproxima fins a 4.669198941237705
    d = (vpa(a1)-vpa(a0))/(vpa(a)-vpa(a1)); %aproxima fins a
    4.669201587522386, que clarament millor
    fprintf('Aproximaci nmero %u %.15f\n', k, double(d));
    a0 = a1; a1 = a;
    mu(k) = a;
end
end_time = clock;

total_time = end_time - start_time;

```

7.4 PARI/GP

Degut a que els resultats en Matlab eren lents, es va decidir utilitzar el software PARI/GP, especialitzat en càlculs algebraics i de precisió arbitrària. Els resultats van millorar enormement als del Matlab en velocitat, i per tant, en nombre d'iteracions i nombre de dígitos aconseguits.

```

n = 30; /* number of iterations */
\p 45 /* precision */

mu = vector(n);
a0 = 2; a1 = 1 + sqrt(5); d = 4;
mu[1] = a0;
mu[2] = a1;

{
for(k = 3, n,
    a = a1 + (a1-a0)/d;
    for (i = 1,2,
        res = 0.5; der = 0;
        for (j = 2,2^(k-1)+1,
            der = res*(1-res) + a*(1-2*res)*der;

```

```

        res = a*res*(1-res);
    );
    a = a - (res-0.5)/der;
);
d = (a1-a0)/(a-a1);
time=gettime();
    print(k," ",d,"      done in ",time," ms.");
a0 = a1; a1 = a;
mu[k] = a;
);
}

```

7.5 Demostracions complementaries

Es presenta la demostració del teorema del punt fix de Schauder (4.1.1). Aquesta demostració ha sigut extreta de [1].

Abans de demostrar el teorema es necessiten algunes definicions i lemes.

Sigui X un espai de Banach amb la norma del suprem.

Definició 7.5.1. Sigui $\{x_1, \dots, x_n\} := F \subset X$. L'envolupant convexa de F es defineix com

$$\text{con}(F) := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i : \sum_{i=1}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

Clarament $\text{con}(F)$ és compacte i convex. De fet,

$$\text{con}(F) = \bigcap_j C_j$$

per tots els convexos C_j que contenen F .

Demostració. Siguin $x, y \in \text{con}(F)$. Llavors existeixen t_i i s_i tals que

$$x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n s_i x_i$$

Llavors

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^n (tt_i + (1-t)s_i)x_i$$

Com $\sum_{i=1}^n (tt_i + (1-t)s_i) = 1$, es té que $tx + (1-t)y \in \text{con}(F)$.

Per tant, $\text{con}(F) = C_{j_0}$ per algun j_0 . Així, $C_j \subset \text{con}(F)$. El cas \supset es demostra per inducció sobre x_i . □

Proposició 7.5.2. Projectió de Schauder

Sigui K un subconjunt compacte d'un espai de Banach X . Llavors, donat $\epsilon > 0$, existeix un subconjunt finit $F \subset X$ i una funció

$$P : K \rightarrow \text{con}(F)$$

tal que per cada $x \in K$ tenim

$$d(x, P(x)) = \|x - P(x)\| < \epsilon$$

Demostració. K compacte implica que existeix un subrecobriment finit $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^m$ per K , $F = \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$. Definim

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \epsilon - d(x, x_i), & x \in B(x_i, \epsilon) \\ 0, & x \notin B(x_i, \epsilon) \end{cases}$$

Es clar que $\phi_i(x)$ es continua per $x \in K$. També es té

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(x) > 0$$

per $x \in K$. Sigui

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^m \phi_i(x)$$

Llavors, $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ i definim la projectió de Schauder com

$$P(x) := \frac{\sum_{i=1}^m \phi_i(x) x_i}{\phi(x)}$$

Per tant, $P : K \rightarrow X$ és continua. També, com

$$\sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} = 1$$

es té que $P(x) \in \text{con}(F)$. A més,

$$\begin{aligned} d(P(x), x) &= \left\| \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - x \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} |x_i - x| \\ &\leq \epsilon \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} = \epsilon \end{aligned}$$

□

Amb això ja podem provar el teorema de Schauder 4.1.1. Recordem l'enunciat:

Teorema de Schauder Sigui X un espai de Banach, i sigui C un conjunt no buit, tancat i convex de X . Sigui $f : C \rightarrow C$ una aplicació continua i compacta (i.e., la imatge de conjunts fitats són conjunts relativament compactes). Llavors f té un punt fix a C .

Demostració. $f(C)$ és relativament compacte, per tant $K = \overline{f(C)}$ és compacte. Per cada $\epsilon > 0$ existeix un subrecobriment finit de boles de radi ϵ centrades en els punts de $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ (noteu que n depèn de ϵ)

Hem de veure que existeix $x_0 \in C$ tal que

$$|x_0 - f(x_0)| < \epsilon.$$

Considerem l'aplicació

$$g := P \circ f,$$

g envia C a $\text{con}(F)$ i per tant, si restringim g a $\text{con}(F)$, com C és convex, $\text{con}(F) \subset C$, tenim que $g : \text{con}(F) \rightarrow \text{con}(F)$. Pel teorema del punt fix de Brouwer (com $\text{con}(F)$ és compacte, convex i de dimensió finita), existeix $x_0 \in \text{con}(F)$ tal que $g(x_0) = x_0$. Llavors

$$|x_0 - f(x_0)| = |g(x_0) - f(x_0)| = |P(f(x_0)) - f(x_0)| < \epsilon,$$

on l'últim pas és possible per la proposició 7.5.2. Per tant existeix un punt $\bar{x} \in C$ tal que $\bar{x} = f(\bar{x})$ □

Es presenta la demostració del teorema 1.0.3. Aquesta demostració ha sigut extreta de [5].

Per demostrar el teorema necessitem primer un lema:

Lema 7.5.3. *Sigui f_λ una família uniparametrica de funcions tal que $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ i $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Llavors existeix un interval I al voltant de x_0 i N al voltant de λ_0 , i una funció suau $p : N \rightarrow I$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ i $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. A més, f_λ no té més punts fixos a I*

Demostració del lema 7.5.3. Considerem la funció definida per $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Per hipòtesis, $G(x_0, \lambda_0) = 0$ i

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Pel teorema de la funció implícita, existeixen intervals I al voltant de x_0 i N al voltant de λ_0 , i una funció suau $p : N \rightarrow I$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ i $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ per tot $\lambda \in N$. A més $G(x, \lambda) \neq 0$ tret de $x = p(\lambda)$. □

Demostració del teorema 1.0.3. Sigui $G(x, \lambda) = f_\lambda^2 - x$. En aquest cas, no es pot aplicar directament el teorema de la funció implícita perquè

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(f(0, \lambda_0)) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \right)^2 = 0$$

Per tant, considerem

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x} & x \neq 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & x = 0 \end{cases}$$

H és una funció suau, ja que f ho és i

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x, \lambda)}{x} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

i, a més, satisfà

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) &= \frac{1}{3} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

Comprovem les hipòtesis del teorema de la funció implícita en H :

$$\begin{aligned} H(0, \lambda_0) &= \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) \\ &= (f'_{\lambda_0})'(0) - 1 \\ &= f'_{\lambda_0}(0) \cdot f'_{\lambda_0}(0) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

⁸ Comprovem $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$. En efecte

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \bigg|_{\lambda=\lambda_0} \left((f_\lambda^2)'(0) - 1 \right) \\ &= \frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}(0) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Per tant, pel teorema de la funció implícita, existeix una funció suau $p(x)$ definida en un entorn de 0 que satisfà $p(0) = \lambda_0$ i $H(x, p(x)) = 0$. En particular,

$$\frac{1}{x} G(x, p(x)) = 0$$

per $x \neq 0$, per tant x és un punt de període 2 per $f_{p(x)}$. A més, pel lema 7.5.3, $f_{p(x)}(x) \neq x$. \square

La derivada de Schwarz esta relacionada amb la funció $p(x)$ de la demostració, però aquesta part no s'ha inclòs perquè requereix de teoria extra que no s'utilitza en la resta del treball. Podeu trobar tots els detalls a [5].

Referències

- [1] Brian Bockelman. *Schauder Fixed Point Theorem*. URL: http://www.math.unl.edu/~s-bbockel1/933-notes/Schauder_Fixed.html.
- [2] Keith Briggs. "A precise calculation of the Feigenbaum constants". A: *Math. Comp.* 57.195 (1991), pàg. 435-439. ISSN: 0025-5718. DOI: 10.2307/2938684. URL: <https://doi.org/10.2307/2938684>.
- [3] Keith Briggs. "How to calculate the Feigenbaum constants on your PC". A: *Austral. Math. Soc. Gaz.* 16.4 (1989), pàg. 89-92. ISSN: 0311-0729.
- [4] P. Cvitanović. "Universality in chaos". A: Bristol, Adam Hilger, Ltd., 1989, pàg. 19-22.
- [5] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Reprint of the second (1989) edition. Westview Press, Boulder, CO, 2003, pàg. xvi+335. ISBN: 0-8133-4085-3.
- [6] Mitchell J. Feigenbaum. "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations". A: *J. Statist. Phys.* 19.1 (1978), pàg. 25-52. ISSN: 0022-4715. DOI: 10.1007/BF01020332. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01020332>.
- [7] Mitchell J. Feigenbaum. "The universal metric properties of nonlinear transformations". A: *J. Statist. Phys.* 21.6 (1979), pàg. 669-706. ISSN: 0022-4715. DOI: 10.1007/BF01107909. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01107909>.
- [8] Mitchell J. Feigenbaum. "Universal behavior in nonlinear systems". A: *Los Alamos Sci.* 1.1 (1980), pàg. 4-27.

⁸El llibre [5] de R.L. Devaney té un petit error de transcripció aquí, ja que escriu $f'_{\lambda_0}(0) \cdot f'_\lambda(0)$, *queno és correcte*.

- [9] John Guckenheimer i Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Applied Mathematical Sciences. Revised and corrected reprint of the 1983 original. Springer-Verlag, New York, 1990, pàg. xvi+459. ISBN: 0-387-90819-6.
- [10] M. W. Hirsch, C. C. Pugh i M. Shub. *Invariant manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, pàg. ii+149.
- [11] O. S. Kozlovski. "Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition". A: *Ann. of Math. (2)* 152.3 (2000), pàg. 743-762. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/2661353. URL: <https://doi.org/10.2307/2661353>.
- [12] Oscar E. Lanford III. "A shorter proof of the existence of the Feigenbaum fixed point". A: *Comm. Math. Phys.* 96.4 (1984), pàg. 521-538. ISSN: 0010-3616. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103941912>.
- [13] Mikhail Lyubich. "Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture". A: *Ann. of Math. (2)* 149.2 (1999), pàg. 319-420. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/120968. URL: <https://doi.org/10.2307/120968>.
- [14] Robert M. May. "Simple mathematical models with very complicated dynamics". A: 261 (1976), pàg. 459-467.
- [15] Andrea Molteni. "An efficient method for the computation of the Feigenbaum constants to high precision". A: *arXiv:1602.02357v1 [math.DS]* 7 Feb 2016 8 (2016). URL: <https://arxiv.org/abs/1602.02357>.
- [16] A. N. Sharkovsky et al. *Dynamics of one-dimensional maps*. Vol. 407. Mathematics and its Applications. Translated from the 1989 Russian original by Sivak, P. Malyshev and D. Malyshev and revised by the authors. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997, pàg. x+261. ISBN: 0-7923-4532-0. DOI: 10.1007/978-94-015-8897-3. URL: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8897-3>.
- [17] Steven H. Strogatz. *MAE5790-21 Feigenbaum's renormalization analysis of period doubling*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=90kVNIimSc>. Cornell MAE.
- [18] Steven H. Strogatz. *MAE5790-22 Renormalization: Function space and a hands-on calculation*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=97XDsyXr5HU>. Cornell MAE.
- [19] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity. Second printing, November 1994. Addison-Wesley Pub. Co., 1994, pàg. xi+498. ISBN: 0-2015-4344-3.